1. Gaia 1

Egitura Aljebraikoak

[1]

1.1 Taldea

Definizioa 1.1.1. *Izan bitez A multzoa eta $*$ A-ko eragiketa.* $(A, *)$ *taldea dela esaten dugu hiur baldintza hauek betetzen direnean:*

(i) Propietate elkarkorra betetzen da.

(ii) Elementu neutroa existitzen da.

(iii) A multzoko elementu guztiak alderanzgarriak dira. Gainera propietate trukakorra betetzen bada orduan $(A, *)$ *talde abeldarra edo talde trukakorra deitzen da.*

Ohartu $(A, *)$ taldea bada: elementu neutroa bakarra da, A-ko elementu guztiak alderantzizkoa dute eta sinplifikagarriak dira.

Adibideak 1.1.2.

(i) Zenbaki Multzoak: $(Z, +)$ *talde abeldarra da,* $(Z, \cdot)$ *ez da taldea baina* $(\{1, -1\}, \cdot$ *talde abeldarra da.* $(Q, +)$ *talde abeldarra da,* $(Q, \cdot)$ *ez da taldea baina* $(Q - \{0\}, \cdot)$ *talde abeldarra da.* $(R, +)$ *talde abeldarra da,* $(R, \cdot)$ *ez da taldea baina* $(R - \{0\}, \cdot)$ *talde abeldarra da.*

(ii) Izan bedi ondorengo multzoa:

$$M_2(R) = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} | a_{ij} \in R, \forall i, j \in \{1, 2\}\}$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

(a) $(M_2(R),+)$ *talde abeldarra da.*

(b) $(M_2(R),\cdot)$ *ez da taldea elementu alderanzgarriak matrize alderangarriak direlako bakarrik. Kasu orokorra:*

$$M_n(R)=\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} |a_{ij}\in R,\forall i,j\in\{1,...,n\}\}$$

(a) $(M_n(R),+)$ *talde abeldarra da.*

(b) $(M_n(R),\cdot)$ *ez da taldea elementu alderanzgarriak matrize alderangarriak direlako bakarrik.*

(iii) $(R^2,+)$ *talde abeldarra da eta* $(R^n,+)$ *ere bai.*

Definizioa 1.1.3. *Izan bedi* $*$ A *multzoko eragiketa.* $(A,*)$ *monoidea dela esaten da baldin eta elkarkorra eta neutroduna bada.*

Teorema 1.1.4. $(A,*)$ *monoidea bada definitzen dugu:*

$$\mathcal{U}(A)=\{a\in A \quad | \quad a \text{ alderanzgarria } \}$$

Orduan $\mathcal{U}(A)$ *taldea da, talde hau unitateen taldea deitzen dugu.*

Frogapena 1.1.5.

Adibideak 1.1.6.

(i) $(R,\cdot)$ *monoidea da eta* $\mathcal{U}(R)=R-\{0\}$ *denez, aurreko teoremaren arabera,* $(R-\{0\},\cdot)$ *taldea da.*

(ii) $(Q,\cdot)$ *monoidea da eta* $\mathcal{U}(Q)=Q-\{0\}$ *denez, aurreko teoremaren arabera,* $(Q-\{0\},\cdot)$ *taldea da.*

(iii) $(Z,\cdot)$ *monoidea da eta* $\mathcal{U}(Z)=\{-1,1\}$ *denez, aurreko teoremaren arabera,* $\{-1,1\},\cdot)$ *taldea da.*

(iv) $(\mathrm{M}_n(R),\cdot)$ *monoidea da eta* $(\mathcal{U}(\mathrm{M}_n(R)),\cdot)$ *taldea da. Talde hau adierazteko* $(GL_n(R),\cdot)$ *notazioa erabiliko dugu eta* n*. mailako talde lineal orokorra deitzen da.*

(v) $(\mathcal{F}(A),\cdot)$ *monoidea da eta* $\mathcal{U}(\mathcal{F}(A))$ *taldea da. Talde hau denotatzeko* $(S_A,\circ)$ *notazioa erabiliko dugu eta* A*-ren talde simetrikoa deitzen da.*

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

1.2 Eraztuna

Definizioa 1.2.1. *Izan bitez R multzoa eta $+, \cdot$ E gaineko bieragiketa.* $(E, +, \cdot)$ *eraztuna dela esaten da baldin eta hurrengo baldintzak betetzen badira:*

(i) $(E, +)$ *talde abeldarra da.*

(ii) $\cdot$ *propietate elkarkorra betezen du.*

(iii) Propietate banakorrak betetzen dira, hau da:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in R$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x, \forall x, y, z \in R$$

Eraztun motak:

1.- $(R, +, \cdot)$ eraztun bat *eraztun trukakorra* deitzen da $\cdot$ trukakorra denean.

2.- $(R, +, \cdot)$ eraztun bat *identitatedun eraztuna* deitzen da $\cdot$ eragiketak elementu neutroa duenean, elementu neutro hau *identitatea* deitzen da.

Oharra 1.2.2. *Izan bedi* $(E, +, \cdot)$ *eraztuna.*

(i) $+$ *notazioa erabiltzen badugu: elementu neutroa* 0 *eta* a*-ren alderantzizkoa adierazteko* $-a$ *denotatuko ditugu.*

(ii) $\cdot$ *notazioa erabiltzen badugu: elementu neutroa* 1 *eta* a*-ren alderantzizkoa adierazteko* a^{-1} *denotatuko ditugu.*

Adibideak 1.2.3.

(i) Zenbaki multzoak: $(Z, +, \cdot), (Q, +, \cdot)$ *eta* $(R, +, \cdot)$ *identitatedun eraztun trukakorrak dira baina* $((N), +, \cdot)$ *ez da eraztuna.*

(ii) Izan bedi $E = \{2k \quad | \quad k \in Z\}$ *zenbaki bikoitien multzoa orduan* $(E, +, \cdot)$ *eraztun trukakorra da baina ez identitateduna.*

(iii) $(\mathrm{M}_2(R), +, \cdot)$ *identitatedun eraztuna da baina ez da trukakorra.*

(iv) $(E = \{0\}, +, \cdot)$ *identitatedun eraztun trukakorra da, eraztun hau tribiala deitzen da. Kasu honetan* $0 = 1$.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

Teorema 1.2.4. *Izan bedi* $(E, +, \cdot)$ *eraztuna orduan* $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x, \forall x \in E$.

Frogapena 1.2.5. $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ *eta elementuak sinplifikagarria direnez* $0 = x \cdot 0$. *Beste berdintza era berean frogatzen da.*

Teorema 1.2.6. *Izan bedi* $(E, +, \cdot)$ *eraztun ez-tribiala orduan* $1 \neq 0$. *Bereziki,* 0 *ezin da alderanzgarria izan* $\cdot$ *eragiketarekiko.*

Frogapena 1.2.7. *Eraztuna ez denez tribiala existitzen da* $0 \neq x \in E$. *Beraz, aurreko teorema erabiliz* $x \cdot 0 = 0$ *da eta ondorioz* 0 *izan da izan elementu neutroa biderketarekiko, hau da* $1 \neq 0$. *Bigarren partea frogatzeko,* 0 *alderanzgarria balitz exitituko litzateke* x *non* $x \cdot 0 = 1$ *den baina hau ezinezkoa da aurreko teorematik.*

1.3 Gorputza

Definizioa 1.3.1. *Izan bedi* $(K, +, \cdot)$ *eraztuna eta demagun hurrengo propietateak betetzen direla:*

(i) $(K, +, \cdot)$ *ez tribiala da.*

(ii) $(K, +, \cdot)$*identitateduna eta trukakorra.*

(iii) $K - \{0\}$ *multzoko elementu guztiak alderanzgarriak dira* $\cdot$ *eragiketarekiko. Orduan* $(K, +, \cdot)$ *gorputza deitzen da.*

Adibideak 1.3.2.

(i) Zenbaki multzoak: $(Z, +, \cdot)$ *ez da gorputza,* $(Q, +, \cdot)$ *eta* $(R, +, \cdot)$ *gorputzak dira, eta* $((N), +, \cdot)$ *ez da gorputza.*

(ii) $(\mathrm{M}_n(R), +, \cdot)$ *ez da gorputza.*

Teorema 1.3.3. *Demagun* $+$ *eta* $\cdot$ K *gaineko eragiketak direla. Orduan* $(R, +, \cdot)$ *gorputza da baldin eta soilik baldin:*

(i) $(K, +)$ *talde abeldarra da.*

(ii) $(K - \{0\}, \cdot)$ *talde abeldarra da.*

(iii) K *ez-tribiala da.*

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

(iv) Propietate banakorretako bat betetzen da.

Frogapena 1.3.4. *Berehalakoak dira frogatu beharreko bi inplikazioak.*

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia