1. Gaia 1

Eragiketa

[1]

1.1 Eragiketa ed Barne Konposaketako Legea

Definizioa 1.1.1. *Izan bedi $A \neq \emptyset$ multzoa. Orduan,* **eragiketa** *bat A multzoan edo* **barne konposaketako legea** *aplikazio bat da:*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A \times A & \rightarrow & A \\ & & (a,b) & \mapsto & f(a,b) \end{array}$$

Oharra: Notazio aldetik, normalean, $f(a,b)$ idatzi beharrean, honela idatziko dugu eragiketaren emaitza: $a*b, aob, a \cdot b, ...$ eta eragiketa adierazteko $*, \circ, \cdot, ...$

Adibideak 1.1.2.

(i) Izan bedi $A = \{0,1\}$ multzoa. Defini ditzagun A-n bi eragiketa $*$ eta $\circ$.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} 0*0 & = & 0 & 0\circ 0 & = & 0 \\ 0*1 & = & 0 & 0\circ 1 & = & 1 \\ 1*0 & = & 0 & 1\circ 0 & = & 1 \\ 1*1 & = & 1 & 1\circ 1 & = & 0 \end{array}$$

Ikusten denez, multzo batean eragiketa bat baino gehiago defini ahal da.

(ii) Izan bedi $A = Z$ multzoa.

(a) $a + b \in Z, \forall a, b \in Z$. Z-ko ohiko batuketa eragiketa da Z-n

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

(b) $ab \in Z, \forall a, b \in Z$. *Z-ko ohiko biderketa eragiketa da Z-n*

(c) $a * b = \sqrt{ab}, \forall a, b \in Z$ *ez da Z-ko eragiketa.*

(iii) Izan bedi $A = R - \{0\}$. $a * b = \frac{a}{b}, \forall a, b \in A$ *eragiketa bat da A-n baina ez R multzoan.*

(iv) Izan bedi $A = (N)$. $a * b = a^b, \forall a, b \in (N)$ (N)*-n eragiketa bat da baina ez Z-n.*

(v) Izan bedi $\mathcal{F}(A) = \{f : A \to A | f \text{ aplikazioa } \}$. *Orduan* $(f \circ g)$ *non* $(f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in R$ *eragiketa bat da* $F(A)$ *multzoan.*

(vi) Izan bedi A multzoa eta $\mathcal{B}(A) = \{A - \text{ren azpimultzoak}\}$ *bere booleanoa.* $\mathcal{B}(A)$ *gainean: bilketa, ebaketa eta diferentzia eragiketak dira.*

Definizioa 1.1.3. *A multzoa finitua bada,* $A = \{a_1, ..., a_n\}$, *eta* $*$ *A-ko eragiketa bada orduan eragiketaren emaitzak era honetako taula baten bitartez adierazi ahal dira:*

$(A, *)$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$\cdots$	$a_1 * a_n$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$\cdots$	$a_2 * a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_n	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$	$\cdots$	$a_n * a_n$

Aurreko taulari A-ren taula + eragiketarekiko deitzen da. A infinitua bada ezin dugu taularik eraiki.

Izan bedi A multzoa eta $*$ A-n definitutako eragiketa bat. $*$ ondoko propietateak eduki ahal ditu:

1.- *Propietate elkarkorra.*

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in A.$$

2.- *Propietate trukakorra.*

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in A.$$

3.- *Elementu neutroa*

Existitzen da $e \in A$ non:

$$a * e = a = e * a, \forall a \in A$$

[2]

Kasu honetan, e elementu neutro deitzen da.

4.- *Elementu alderanzgarriak*

Demagun $*$ eragiketak elementu neutroa duela, e. Orduan $a \in A$ elementu *alderanzgarria* dela esaten da baldin eta existitzen bada $a^{'} \in A$ non:

$$a * a^{'} = e = a^{'} * a$$

Kasu honetan, $a^{'}$ a-ren *alderantzizkoa* deitzen da.

Adibideak 1.1.4.

(i) $(R, +)$, *x alderanzgarria da baldin eta soilik baldin existitzen bada $x^{'} \in R$ non $x + x^{'} = 0 = x^{'} + x$ betetzen duen. Horretarako nahikoa da $-x$ hartzea. Bestalde, $(R, \cdot)$ x alderanzgarria da baldin eta soilik baldin $x \neq 0$. Eta kasu honetan, x-ren alderantzizkoa $1/x$ da.*

(ii) $(\mathcal{F}(A), \circ)$ *propietate elkarkorra eta elementu neutroa du.*

(iii) $(\mathcal{B}(A), \cup)$ *propietate elkarkorra, trukakorra eta elementu neutroa du.*

Izan bedi $*$ A-ko eragiketa eta demagun propietate elkarkorra betetzen duela orduan $a_1 * ... * a_n$ adierazpenak zentzua du $\forall a_1, ..., a_n \in A$.

Teorema 1.1.5.

(i) Izan bedi $*$ A-ko eragiketa eta demagun propietate elkarkorra betetzen duela orduan $a_1 * ... * a_n$ adierazpenak zentzua du $\forall a_1, ..., a_n \in A$.

(ii)Izan bedi $*$ A-ko eragiketa. Existitzen bada elementu neutro $*$-rekiko, bakarra da.

(iii) $*$ eragiketa neutroduna eta elkarkorra bada orduan elementu alderanzgarri bakoitzak alderantzizko bakarra du.

(iv) Izan bedi $*$ A multzoko eragiketa neutroduna eta elkarkorra. Orduan elementu alderanzgarriak sinplifikagarriak dira, hau da, hurrengo inplikazioak betetzen dituzte: $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ eta $b * a = c * a \Rightarrow b = c$.

Frogapena 1.1.6.

(i) n gaineko indukzioa erabiliz. $n = 3$ kasua da propietate elkarkorraren definizioa.

(ii) Demagun e eta $e^{'}$ elementu neutroak direla. Orduan $e = e * e^{'} = e^{'}$ da.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

(iii) Demagun a elementuak bi alderantzizko dituela a_1 *eta* a_2*. Orduan* $a_2 = (a_1 * a) * a_2 = a_1 * a * a_2 = a_1 * (a * a_2) = a_1$ *da.*

(iv) $a{*}b = a{*}c$ *dela suposatuz, a-ren alderantzizkoa* $a^{'}$ *erabiliz,* $a^{'}{*}a{*}b = a^{'}{*}a{*}c$ *izango da eta ondorioz* $b = c$*. Beste inplikazioa era berean frogatzen da.*

Ohartu $*$ elkarkorra ez bada ezin dela ziurtatu elementu alderanzgarriek alderantzizko bakarra dutenik. Adibidez, hurrengo eragiketa R gainean:

$$x * y = x^2y^2 + x + y$$

Eragiketa honek elementu neutroa du $e = 0$ eta -1 elementuak bi alderantzizko ditu.

Oharra 1.1.7. $+$ *eta* $\cdot$ *notazioak bakarrik erabiliko ditugu eragiketa elkarkorretarako. Orduan neutroa, egonez gero, eta elementu alderanzgarrien alderantzizkoa bakarra izango da. Orduan ikur bereziak erabiltzen ditugu horiek denotatzeko:*

(i)+ eragiketarekiko: neutroa (0) eta a-ren alderantzizkoa $-a$*.*

(ii)$\cdot$ eragiketarekiko: neutroa (1) eta a-ren alderantzizkoa a^{-1}*.*

Ohartu elementu bat sinplifikagarria bada ez duela zertan alderanzgarria izan. Adibidez: $(Z, \cdot)$ bikotean 2 sinplifikagaria da baina ez da alderanzgarria.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia