1. Gaia 1

Baliokidetasun Erlazioak

[1]

1.1 Baliokidetasun erlazioak.

Definizioa 1.1.1. *Izan bedi A multzoa. A-n definitutako erlazio bat zera da a eta $b \in A$ bi edozein elementu erlazionaturik dauden ala ez esaten digun erregela bat. $a \sim b$ idatziko dugu erlazionaturik daudenean. Bestela $a \not\sim b$.*

Definizioa 1.1.2. *Izan bedi A multzoa. A-n definitutako baliokidetasun erlazio bat hurrengo hiru propietate hauek betetzen dituen erlazio bat izango da:*

(i) Erreflexiboa:

$$a \sim a \quad \forall a \in A$$

(ii) Simetrikoa:

$$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a \quad a, b \in A$$

(iii) transitiboa:

$$a \sim b \quad eta \quad b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad a, b, c \in A$$

Adibideak 1.1.3.

(i) $a \sim b \quad \Leftrightarrow a = b$. Baliokidetasun erlazioa da.

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

(ii) $A = Z$ *bada definitzen dugu ondorengo erlazioa:*

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ zenbaki bikoitia.}$$

Baliokidetasun erlazioa da.

Definizioa 1.1.4. *Izan bitez* A *multzoa eta* $\sim$ *baliokidetasun erlazioa. Orduan* $a \in A$ *bada,* a*-ren baliokidetasun klasea,* $\overline{a}$ *edo* $[a]$ *denotatzen dena ondorengo multzoa da:*

$$\overline{a} = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Oharra $a \in \overline{a}$ beti ematen da ondorioz $[a] \neq \emptyset$.

Teorema 1.1.5. *Izan bedi* A *multzoa,* $a, b \in A$ *eta* $\sim$ A*-n definitutako baliokide erlazioa. Orduan:*

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Leftrightarrow [a] = [b].$$

Oharra: $A = \cup_{a \in A}[a]$ froga daiteke, gainera, aurreko teorema erabiliz bildura disjuntua da.

Izan bedi A multzoa eta $\sim$ A-n definituriko baliokidetasun erlazioa, baliokidetasun klaseak osatzen duten multzoa, $A/\sim$ denotatzen dena, *zatidura multzoa* deitzen da. Hots:

$$A/\sim = \overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}.$$

Elementu bat klase batean badago, klasearen *ordezkari* bat dela esaten dugu. Hots C klase bat bada, $a \in A$ bere ordezkaria da b.s.b $C = \overline{a}$ bada. Deskribatu nahi badugu $\overline{A}$ errepikapenik gabe, orduan baliokidetasun klase bakoitzeko ordezkari bakar bat hartu behar dugu. Orduan, *ordezkarien sistema oso bat* hartu dugula esaten dugu edo beste era batera ordezkarien sistema oso bat A multzoko X azpimultzo bat da non A-ko edozein elementu X multzoko elementu bakar batekin erlazionatuta dagoen. Argi eta garbi baliokidetasun klase guztien bildura A multzoa da. Beraz, honekin eta aurreko teoremarekin, hurrngo teorema ondorioztatzen da:

Adibideak 1.1.6. *Kalkulatu ondorengo baliokidetasun erlazioeen baliokidetasun klaseak etazatidura multzoak.*

(i) $a \sim b \quad \Leftrightarrow a = b.$

$$\overline{a} = \{b \in A \mid a \sim b\} = \{b \in A \mid a = b\} = \{a\}$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3] *eta*

$$\overline{A} = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

(ii) $A = Z$ *eta* $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ zenbaki bikoitia. *Orduan, adibidez* $a = 2$ *bada:*

$$\overline{2} = \{a \in Z \mid a \sim 2\} = \{a \in Z \mid a - 2 \ \text{ bikoitia}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$$

Orokorrean, x *bikoitia bada:*

$$\overline{x} = \{a \in Z \mid a - x \ \ bikoitia\} = \{a \in Z \mid a \ \text{ bikoitia }\} = \overline{2} = \overline{4} = ...$$

Bestetik, $a = 1$ *bada:*

$$\overline{1} = \{a \in Z \mid a \sim 1\} = \{a \in Z \mid a - 1 \ \text{ bikoitia }\}$$

$$= \{a \in Z \mid a \ \ bakoitia\} = \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$$

Orokorrean, x *bakoitia bada:*

$$\overline{x} = \{a \in Z \mid a - x \ \text{ bikoitia}\} = \{a \in Z \mid a \ \text{ bakoitia}\} = \overline{1} = \overline{3} = ...$$

Eta zatidura multzoa:

$$\overline{Z} = \{\overline{1}, \overline{2}\}$$

(iii) Izan bedi $A = Z$ *eta* $n \in (N)$. *Multzo honetan ondorengo erlazioa definitzen dugu:*

$$a \sim_n b \Leftrightarrow \exists \lambda \in Z \ \text{ non } \ a - b = n\lambda \ \text{ den.}$$

Adibidez $n = 3$ *bada,* $\sim_3$ *erlazioa:*

$$a \sim_3 b \Leftrightarrow \exists \lambda \in Z \ \text{ non } \ a - b = 3\lambda \ \text{ den.}$$

baliokidetasun klaseak kalkulatzen baditugu:

$$\overline{0} = \{z \in Z \mid 0 \sim_3 z\} = \{z \in Z \mid \exists \lambda \in Z, 0 - z = 3\lambda\} = \{3m \mid m \in Z\}$$

$$\overline{1} = \{z \in Z \mid 1 \sim_3 z\} = \{z \in Z \mid \exists \lambda \in Z, 1 - z = 3\lambda\} = \{1 + 3m \mid m \in Z\}$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

$$\overline{2} = \{z \in Z \ \mid \ 2 \sim_3 z\} = \{z \in Z \ \mid \ \exists \lambda \in Z, 2 - z = 3\lambda\} = \{2 + 3m \ \mid \ m \in Z\}$$

Gainera aurrekoak dira dauden baliokidetasun klase desberdin guztiak, zeren:

$\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{1 + 3z}, \quad z \in Z.$

$\overline{2} = \overline{5} = \overline{8} = \overline{2 + 3z}, \quad z \in Z.$

$\overline{3} = \overline{0} = \overline{9} = \overline{3 + 3z}, \quad z \in Z.$

Beraz $n = 3$ *denean zatidura multzoa:*

$$\overline{Z} = \{\overline{a} \ \mid \ a \in Z\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} = Z/3Z \equiv Z_3$$

$n = 3$ *kasuan egin dugun bezala orokorrean egin daiteke eta definitu* Z/nZ *edo* Z_n *zatidura multzoa:*

$$\overline{Z} = \{\overline{z} \ \mid \ z \in Z\} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}.$$

Non $k \in Z$ *bakoitzarentzat:*

$$\overline{k} = \{k + nz \ \mid \ z \in Z\}$$

Eta zatidura multzoa:

$$\overline{Z} = \{\overline{1}, \overline{2}\}$$

(iii) Izan bedi $A = R^2 - \{(0,0)\}$ *eta ondorengo erlazioa:*

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R - \{0\} \ \mid \ x_1 = \lambda x_2 \ \ eta \ \ y_1 = \lambda y_2$$

Baliokidetasun erlazioa da eta $(x_1, y_1) \in A$ *bada orduan:*

$$\overline{(x_1, y_1)} = \{(x_2, y_2) \ \mid \ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)\}$$
$$= \{(x_2, y_2) \ \mid \ \exists \lambda \in R - \{0\} \ non \ x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2\}$$
$$\{(\lambda x_1, \lambda y_1) \ \mid \ \lambda \in R - \{0\}\}$$

Adibidez $\overline{(1,0)} = \{(\lambda, 0) \ \mid \ \lambda \in R - \{0\}\}.$

Zatidura multzoa:

$$\overline{A} = \{\overline{(x,y)} \ \mid \ (x,y) \in R^2 - \{(0,0)\}\}$$

Hau da, baliokidetasun klase desberdin guztiak jatorritik pasaten diren zuzenak (jatorria kenduta) dira. Zatidura mulzoa beste era honetara idazten da $P^1(R)$ *eta 1 dimentsioko espazio proiektiboa deitzen da.*

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia