1. Gaia 1

Aplikazioak

[1]

1.1 Aplikazioak.

Definizioa 1.1.1. *A eta B multzoak badira, A-tik B-rako* **aplikazio** *edo* **funtzio** *bat zera da $a \in A$ bakoitzari B-ren elementu bakar bat egokitzen dion erregela bat. A aplikazioaren* **eremua** *deitzen da eta B aplikazioaren* **koeremua** *edo* **helburu multzoa**. *$f(a) = b$ baldin bada, a b-ren* **aurreirudia** *izango da eta b a-ren* **irudia**.

A-ren elementuek irudi bakar bat baino ezin dezakete izan, B-ren elementuei buruz ezin dugu ezer esan, aurreirudi bat izan ezkero ez du zertan bakarra izan behar.

Adibideak 1.1.2. *(Identitate aplikazioa). A multzoa bada honela definitzen da:*

$$\begin{array}{cccc} 1_A : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \rightarrow & 1_A(a) = a. \end{array}$$

Definizioa 1.1.3. *Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : C \to D$ bi aplikazio. f eta g berdinak dira b.s.b $A = C$, $B = D$ eta $f(a) = g(a) \ \ \forall a \in A$.*

Izan bitez $f : A \to B$ funtzioa eta $S \subseteq A$ orduan S-ren *irudia*, $f(S)$ denotatzen duguna, B-ren azpimultzoa da:

$$f(S) = \{f(a) \ \mid \ a \in S\}.$$

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

Izan bitez $f : A \to B$ funtzioa eta $T \subseteq B$ orduan T-ren *aurreirudia*, $f^{-1}(T)$ denotatzen duguna, A-ren azpimultzoa da:

$$f^{-1}(T) = \{a \mid f(a) \in T\}.$$

Oharra 1.1.4.

(i) Izan bedi $f : A \to B$. $S = A$ bada orduan $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ irudia deitzen da eta idatzi $f(A)$ edo Imf.

(ii) $\emptyset \neq T \subseteq B$ eta $f : A \to B$ aplikazioa, orokorrean $f^{-1}(T) \neq \emptyset$ ez da betetzen. Hau da ez hutsa den azpimultzo baten aurreirudia ez du zertan ez hutsa izan behar.

(iii) $b \in B$ bada orduan $\{b\} \subseteq B$, elementu batez osatutako multzoa, orduan $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ izango da, normalean $f^{-1}(\{b\})$ honela idazten da $f^{-1}(b)$.

[2]

Adibideak 1.1.5. *Izan bedi $f : R \to R$ eta $f(x) = x^2$, $S = \{0, 1, -1, 2\} \subseteq R$ aukeratuz, $f(S) = \{0, 1, 4\}$ da eta $T = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq -1\}$ multzoaren aurreirudia $f^{-1}(T) = \emptyset$ baina $T = \{0, 1, -1, 2\} \subseteq R$ aukeratuz, $f^{-1}(T) = \{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ da. $Imf = \{f(a) \mid a \in A\} = \{a^2 \mid a \in R\} = R^+ = [0, +\infty)$ da.*

1.1.1 Aplikazio motak

Hiru motako aplikazioak definituko ditugu:

1.-*Injektiboa*: $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa injektiboa dela esango dugu irudi berbera duten elementu desberdinak ez daudenean. Hots:

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

edo baliokideki:

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

2.- *Supraiektiboa*: $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa suprajektiboa deitzen da irudi multzoa eta koeremua multzo bera denean, $f(A) = B$. Hots:

$$\forall b \in B \ \ \exists a \in A \mid f(a) = b$$

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

3.- *Bijektiboa*: $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa bijektiboa deitzen da aldi berean injektiboa eta supraiektiboa denean. Hau da:

$$\forall b \in B \ \ \exists! a \in A \ \mid \ f(a) = b$$

Adibideak 1.1.6.

(i) Izan bedi:

$$\begin{array}{rccc} f: & R & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

Orduan f ez da injektiboa eta supraiektiboa da.

(ii) Izan bedi:

$$\begin{array}{rccc} f: & (N) & \longrightarrow & (N) \\ & n & \rightarrow & 2n \end{array}$$

Orduan f injektiboa da eta ez da suprajektiboa .

(iii) A edozein multzo izanda 1_A identitate aplikazioa bijektiboa da.

[3]

1.1.2 Aplikazioen konposaketa

Definizioa 1.1.7. *Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$ bi aplikazio eta demagun f-ren koeremua eta g-ren eremua berdinak direla. Orduan f eta g-ren* **konposaketa***, $g \circ f$ denotatzen dena eta irakurri f konposatu g, beste aplikazio bat da, honela definiturik:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \rightarrow & g(f(a)) \end{array}$$

Hau da $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \ \ \forall a \in A$.

Adibideak 1.1.8. *Izan bitez $f : R \longrightarrow R$ eta $g : R \longrightarrow R$ non $f(x) = x^2 \ \ \forall x \in R$ eta $g(x) = x + 1 \ \ \forall x \in R$ diren. Orduan $(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \ \ \forall x \in R$ eta $(f \circ g)(x) = (x+1)^2 \ \ \forall x \in R$.Oharra: Adibidean ikusten den bezala orokorrean konposaketak ez du propietate trukakorra betetzen hots:*

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia