1. Gaia 1

Multzo Teoria

[1]

1.1 Sinboloak.

Matematikan sinboloak erabiltzen dira expresioak laburtzeko, ondoren gehien erabiltzen direnak:

Sinboloak	**Esanahia**
$\forall$	edozein
$\exists$	existitzen da
$\exists!$	bakar bat existitzen da
$/$	non
$\mid$	non
$\wedge$	eta
$\vee$	edo
$\Rightarrow$	halabeharrez (inplikatzen du)
$\Longleftrightarrow$	baldin eta soilik baldin
$\sum$	batukaria

Adibideak 1.1.1.

(i) Izan bedi $\{a_n\}_{n\in(N)}$ *segida bat. Orduan:*

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k.$$

definitzen dugu $\sum$ ikurra <u>*batukaria*</u>*, sigma, deitzen da.*

Orokorrean, i, j zenbaki arruntak badira eta $i < j$ bada, orduan:

$$\sum_{n=i}^{j} a_n = a_i + a_{i+1} + ... + a_j.$$

(ii) " $\forall m$ zenbaki arruntarentzat, $\exists y$ zenbaki arrunta $| \quad y > m$ " expresioa horrela irakurtzen da:

" Edozein m zenbaki arruntarentzat y zenbaki arrunt bat existitzen da non y m baino handiagoa den".

1.2 Multzoak

Definizioa 1.2.1. *Multzo bat gauzen bilduma bat da. Gauza horiek multzoko* **elementuak** *deitzen dira. Normalean multzoak adierazteko letra maiuskulak erabiltzen dira: $A, B, C, ...$ eta elementuak adierazteko letra minuskulak:x, y, z, a, b..*

Multzo bat definitzeko bi era daude:

1.-*Hedaduraz*: Multzoaren elementu guztiak zerrendatuz. Adibidez: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.-*Ezagupidez*: Multzo horretako elementuak bereizten dituen propietate bat (batzuk) emanez. Orduan, horrela idatziko dugu multzoan $\{x| \quad p(x)\}$ non $p(x)$ x-i buruzkopropietate bat den. Adibidez: $B = \{x \quad |x$ arrunta eta $x \leq 5\} = A$.

x elementua A multzoan badago $x \in A$ idatziko dugu eta x elementua A multzoan ez badago $x \notin A$. Adibidez $(N) = \{x \quad | \quad$ zenbaki arrunta$\}$ bada orduan $-6 \notin (N)$.

A eta B bi multzo badira eta B multzoko elementu guztiak A multzoan badaude, *partekotasuna* ematen dela esaten dugu eta $B \subseteq A$ edo $B \subset A$, B parte A, idazten dugu. Hau da:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B, \ b \in A.$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

B multzoko elementu guztiak A-n ez badaude $B \nsubseteq A$ idazten dugu, hau da:

$$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ non } b \notin A.$$

Azkenik, $B \subseteq A$ ematen bada baina desberdinak badira, $(A \neq B)$, eta hori azpimarratu nahi badugu orduan, $B \underset{\neq}{\subset} A$, *partekotasun ertsia*, idazten dugu.

[3]

Adibideak 1.2.2.

(i) $\emptyset \subseteq A$ *eta* $A \subseteq A$.

(ii) Izan bedi $A = \{1, 2, 3\}$ *eta* $Z = \{z \mid z \text{ zenbaki osoa}\}$. *Orduan* $A \underset{\neq}{\subset} Z$.

(iii) Izan bitez $A = \{1, 2, 3, -\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ *eta* $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ eta } b \neq 0\}$. *Orduan,* $A \not\subset Q$.

Definizioa 1.2.3. *A multzoa bada, bere kardinala bere elementuen kopurua da eta* $|A|$ *denotatzen dugu.*

Adibideak 1.2.4.

(i) $A = \{x \mid x \text{ arrunta eta } x \leq 5\} \Rightarrow |A| = 5$.

(ii) $B = \emptyset \Rightarrow |B| = 0$.

(iii) $C = (N) \Rightarrow |C| = +\infty$.

1.2.1 Multzoen arteko eragiketak

Multzoen artean lau eragiketa mota defini ahal dira:

1.-*Ebaketa*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren ebakidura, $A \cap B$ (A ebaki B) denotatzen duguna, beste multzo bat da eta A eta B-n batera dauden elmentuek osatutakoa:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$A \cap B = \emptyset$ denean, A eta B multzoak disjuntuak direla esaten dugu.

2.-*Bilketa*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren bildura, $A \cup B$ (A bil B) denotatzen duguna, beste multzo bat da eta A eta B-ko elmentuak dituena:

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

[4]

A eta B disjuntuak badira bere bildura ere *bildura disjuntua* dela esaten dugu eta hori azpimarratzeko $A \cup B$ idatzi ahal da.

3.-*Biderkadura cartesiarra*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren biderkadura cartesiarra, $A \times B$ denotatzen duguna, beste multzo bat da:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$$

Adibideak 1.2.5. *Izan bedi* $A = B = R$ *orduan* $A \times B = R^2$ *planoa da.*

Oharra 1.2.6.

(i) (a, b) *bikote ordenatua da, hots* $a \in A$ *eta* $b \in B$.

(ii) $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2$.

(iii) $|A| = n$ *eta* $|B| = m$ *badira* $|A \times B| = n \times m$ *da.*

(iv) $A \times B \neq B \times A$.

Era berean A, B eta C hiru multzo badira:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) | \ a \in A, \quad b \in B \quad \wedge \quad c \in C\}$$

Normalean, $A_1, A_2, ..., A_k$ multzoak badira, beraien biderkadura cartesiarra:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | \ a_1 \in A_1, \ a_2 \in A_2, ..., \ a_k \in A_k\}$$

4.-*Diferentzia*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren arteko diferentzia, $A - B$ denotatzen duguna, beste multzo bat da eta A-n bai baina B-n ez dauden elmentuek osatutakoa:

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$$

Multzo osagarria

Suposatu lan egiten ari garen multzo guztiak multzo finko baten azpimultzoak direla, U-renak. Orduan U multzo unibertsala deitzen dugu. $A \subseteq U$ hartuz gero A-ren osagarria, A^c denotatzen dena, honela definitzen da:

$$A^c = U - A = \{x | \ x \in U \quad \wedge \quad x \notin A\}$$

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia