1. Gaia 1

Oinarriak

[1]

1.1 Sinboloak.

Matematikan sinboloak erabiltzen dira expresioak laburtzeko, ondoren gehien erabiltzen direnak:

Sinboloak	**Esanahia**
$\forall$	edozein
$\exists$	existitzen da
$\exists!$	bakar bat existitzen da
$/$	non
$\mid$	non
$\wedge$	eta
$\vee$	edo
$\Rightarrow$	halabeharrez (inplikatzen du)
$\Longleftrightarrow$	baldin eta soilik baldin
$\sum$	batukaria

Adibideak 1.1.1.

(i) Izan bedi $\{a_n\}_{n\in(N)}$ *segida bat. Orduan:*

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k.$$

definitzen dugu $\sum$ ikurra batukaria, sigma, deitzen da.

Orokorrean, i, j zenbaki arruntak badira eta $i < j$ bada, orduan:

$$\sum_{n=i}^{j} a_n = a_i + a_{i+1} + ... + a_j.$$

(ii) " $\forall m$ zenbaki arruntarentzat, $\exists y$ zenbaki arrunta | $y > m$ " expresioa horrela irakurtzen da:

" Edozein m zenbaki arruntarentzat y zenbaki arrunt bat existitzen da non y m baino handiagoa den".

1.2 Multzoak

Definizioa 1.2.1. *Multzo bat gauzen bilduma bat da. Gauza horiek multzoko* **elementuak** *deitzen dira. Normalean multzoak adierazteko letra maiuskulak erabiltzen dira: $A, B, C, ...$ eta elementuak adierazteko letra minuskulak:x, y, z, a, b..*

Multzo bat definitzeko bi era daude:

1.-*Hedaduraz*: Multzoaren elementu guztiak zerrendatuz. Adibidez: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.-*Ezagupidez*: Multzo horretako elementuak bereizten dituen propietate bat (batzuk) emanez. Orduan, horrela idatziko dugu multzoan $\{x| \ \ p(x)\}$ non $p(x)$ x-i buruzkopropietate bat den. Adibidez: $B = \{x \ \ |x$ arrunta eta $x \leq 5\} = A$.

x elementua A multzoan badago $x \in A$ idatziko dugu eta x elementua A multzoan ez badago $x \notin A$. Adibidez $(N) = \{x \ \ | \ \ $ zenbaki arrunta$\}$ bada orduan $-6 \notin (N)$.

A eta B bi multzo badira eta B multzoko elementu guztiak A multzoan badaude, *partekotasuna* ematen dela esaten dugu eta $B \subseteq A$ edo $B \subset A$, B parte A, idazten dugu. Hau da:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B, \ b \in A.$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

B multzoko elementu guztiak A-n ez badaude $B \nsubseteq A$ idazten dugu, hau da:

$$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ non } b \notin A.$$

Azkenik, $B \subseteq A$ ematen bada baina desberdinak badira, $(A \neq B)$, eta hori azpimarratu nahi badugu orduan, $B \underset{\neq}{\subset} A$, *partekotasun ertsia*, idazten dugu.

[3]

Adibideak 1.2.2.

(i) $\emptyset \subseteq A$ *eta* $A \subseteq A$.

(ii) Izan bedi $A = \{1, 2, 3\}$ *eta* $Z = \{z \mid z \text{ zenbaki osoa}\}$. *Orduan* $A \underset{\neq}{\subset} Z$.

(iii) Izan bitez $A = \{1, 2, 3, -\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ *eta* $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ eta } b \neq 0\}$. *Orduan,* $A \not\subset Q$.

Definizioa 1.2.3. *A multzoa bada, bere kardinala bere elementuen kopurua da eta* $|A|$ *denotatzen dugu.*

Adibideak 1.2.4.

(i) $A = \{x \ | x \ \textit{arrunta eta} \ \ x \leq 5\} \Rightarrow |A| = 5$.

(ii) $B = \emptyset \Rightarrow |B| = 0$.

(iii) $C = (N) \Rightarrow |C| = +\infty$.

1.2.1 Multzoen arteko eragiketak

Multzoen artean lau eragiketa mota defini ahal dira:

1.-*Ebaketa*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren ebakidura, $A \cap B$ (A ebaki B) denotatzen duguna, beste multzo bat da eta A eta B-n batera dauden elmentuek osatutakoa:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$A \cap B = \emptyset$ denean, A eta B multzoak disjuntuak direla esaten dugu.

2.-*Bilketa*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren bildura, $A \cup B$ (A bil B) denotatzen duguna, beste multzo bat da eta A eta B-ko elmentuak dituena:

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

[4]

A eta B disjuntuak badira bere bildura ere *bildura disjuntua* dela esaten dugu eta hori azpimarratzeko $A \cup B$ idatzi ahal da.

3.-*Biderkadura cartesiarra*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren biderkadura cartesiarra, $A \times B$ denotatzen duguna, beste multzo bat da:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$$

Adibideak 1.2.5. *Izan bedi $A = B = R$ orduan $A \times B = R^2$ planoa da.*

Oharra 1.2.6.

(i) (a, b) bikote ordenatua da, hots $a \in A$ eta $b \in B$.

(ii) $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2$.

(iii) $|A| = n$ eta $|B| = m$ badira $|A \times B| = n \times m$ da.

(iv) $A \times B \neq B \times A$.

Era berean A, B eta C hiru multzo badira:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) | \;\; a \in A, \quad b \in B \quad \wedge \quad c \in C\}$$

Normalean, $A_1, A_2, ..., A_k$ multzoak badira, beraien biderkadura cartesiarra:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | \;\; a_1 \in A_1, \;\; a_2 \in A_2, ..., \;\; a_k \in A_k\}$$

4.-*Diferentzia*: A eta B multzoak badira, A eta B-ren arteko diferentzia, $A - B$ denotatzen duguna, beste multzo bat da eta A-n bai baina B-n ez dauden elmentuek osatutakoa:

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$$

<u>Multzo osagarria</u>

Suposatu lan egiten ari garen multzo guztiak multzo finko baten azpimultzoak direla, U-renak. Orduan U multzo unibertsala deitzen dugu. $A \subseteq U$ hartuz gero A-ren osagarria, A^c denotatzen dena, honela definitzen da:

$$A^c = U - A = \{x | \;\; x \in U \quad \wedge \quad x \notin A\}$$

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

1.3 Aplikazioak.

Definizioa 1.3.1. *A eta B multzoak badira, A-tik B-rako* **aplikazio** *edo* **funtzio** *bat zera da $a \in A$ bakoitzari B-ren elementu bakar bat egokitzen dion erregela bat. A aplikazioaren* **eremua** *deitzen da eta B aplikazioaren* **koeremua** *edo* **helburu multzoa**. *$f(a) = b$ baldin bada, a b-ren* **aurreirudia** *izango da eta b a-ren* **irudia**.

A-ren elementuek irudi bakar bat baino ezin dezakete izan, B-ren elementuei buruz ezin dugu ezer esan, aurreirudi bat izan ezkero ez du zertan bakarra izan behar.

Adibideak 1.3.2. *(Identitate aplikazioa). A multzoa bada honela definitzen da:*

$$\begin{array}{cccc} 1_A : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \to & 1_A(a) = a. \end{array}$$

Definizioa 1.3.3. *Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : C \to D$ bi aplikazio. f eta g berdinak dira b.s.b $A = C$, $B = D$ eta $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$.*

Izan bitez $f : A \to B$ funtzioa eta $S \subseteq A$ orduan S-ren *irudia*, $f(S)$ denotatzen duguna, B-ren azpimultzoa da:

$$f(S) = \{f(a) \ \mid \ a \in S\}.$$

Izan bitez $f : A \to B$ funtzioa eta $T \subseteq B$ orduan T-ren *aurreirudia*, $f^{-1}(T)$ denotatzen duguna, A-ren azpimultzoa da:

$$f^{-1}(T) = \{a \ \mid \ f(a) \in T\}.$$

Oharra 1.3.4.

(i) Izan bedi $f : A \to B$. $S = A$ bada orduan $f(A) = \{f(a) \ \mid \ a \in A\}$ <u>irudia</u> deitzen da eta idatzi $f(A)$ edo Imf.

(ii) $\emptyset \neq T \subseteq B$ eta $f : A \to B$ aplikazioa, orokorrean $f^{-1}(T) \neq \emptyset$ ez da betetzen. Hau da ez hutsa den azpimultzo baten aurreirudia ez du zertan ez hutsa izan behar.

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

(iii) $b \in B$ bada orduan $\{b\} \subseteq B$, elementu batez osatutako multzoa, orduan $f^{-1}(\{b\}) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ izango da, normalean $f^{-1}(\{b\})$ honela idazten da $f^{-1}(b)$.

[6]

Adibideak 1.3.5. *Izan bedi $f : R \to R$ eta $f(x) = x^2$, $S = \{0, 1, -1, 2\} \subseteq R$ aukeratuz, $f(S) = \{0, 1, 4\}$ da eta $T = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq -1\}$ multzoaren aurreirudia $f^{-1}(T) = \emptyset$ baina $T = \{0, 1, -1, 2\} \subseteq R$ aukeratuz, $f^{-1}(T) = \{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ da. $Imf = \{f(a) \mid a \in A\} = \{a^2 \mid a \in R\} = R^+ = [0, +\infty)$ da.*

1.3.1 Aplikazio motak

Hiru motako aplikazioak definituko ditugu:

1.-*Injektiboa*: $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa injektiboa dela esango dugu irudi berbera duten elementu desberdinak ez daudenean. Hots:

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

edo baliokideki:

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

2.- *Supraiektiboa*: $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa suprajektiboa deitzen da irudi multzoa eta koeremua multzo bera denean, $f(A) = B$. Hots:

$$\forall b \in B \ \ \exists a \in A \mid f(a) = b$$

3.- *Bijektiboa*: $f : A \longrightarrow B$ aplikazioa bijektiboa deitzen da aldi berean injektiboa eta supraiektiboa denean. Hau da:

$$\forall b \in B \ \ \exists ! a \in A \mid f(a) = b$$

Adibideak 1.3.6.

(i) Izan bedi:

$$\begin{array}{cccc} f: & R & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \rightarrow & x^2 \end{array}$$

Orduan f ez da injektiboa eta supraiektiboa da.

[6] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

(ii) Izan bedi:

$$\begin{array}{rccc} f: & (N) & \longrightarrow & (N) \\ & n & \rightarrow & 2n \end{array}$$

Orduan f injektiboa da eta ez da suprajektiboa .

(iii) A edozein multzo izanda 1_A identitate aplikazioa bijektiboa da.

[7]

1.3.2 Aplikazioen konposaketa

Definizioa 1.3.7. *Izan bitez $f : A \longrightarrow B$ eta $g : B \longrightarrow C$ bi aplikazio eta demagun f-ren koeremua eta g-ren eremua berdinak direla. Orduan f eta g-ren* **konposaketa***, $g \circ f$ denotatzen dena eta irakurri f konposatu g, beste aplikazio bat da, honela definiturik:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \rightarrow & g(f(a)) \end{array}$$

Hau da $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \ \ \forall a \in A$.

Adibideak 1.3.8. *Izan bitez $f : R \longrightarrow R$ eta $g : R \longrightarrow R$ non $f(x) = x^2 \ \ \forall x \in R$ eta $g(x) = x + 1 \ \ \forall x \in R$ diren. Orduan $(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \ \ \forall x \in R$ eta $(f \circ g)(x) = (x+1)^2 \ \ \forall x \in R$.Oharra: Adibidean ikusten den bezala orokorrean konposaketak ez du propietate trukakorra betetzen hots:*

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

1.4 Baliokidetasun erlazioak.

Definizioa 1.4.1. *Izan bedi A multzoa. A-n definitutako erlazio bat zera da a eta $b \in A$ bi edozein elementu erlazionaturik dauden ala ez esaten digun erregela bat. $a \sim b$ idatziko dugu erlazionaturik daudenean. Bestela $a \not\sim b$.*

Definizioa 1.4.2. *Izan bedi A multzoa. A-n definitutako baliokidetasun erlazio bat hurrengo hiru propietate hauek betetzen dituen erlazio bat izango da:*

(i) Erreflexiboa:

$$a \sim a \ \ \forall a \in A$$

[7]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

(ii) Simetrikoa:

$$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a \quad a, b \in A$$

(iii) transitiboa:

$$a \sim b \quad eta \quad b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad a, b, c \in A$$

Adibideak 1.4.3.

(i) $a \sim b \quad \Leftrightarrow a = b$. *Baliokidetasun erlazioa da.*

[8]

(ii) $A = Z$ *bada definitzen dugu ondorengo erlazioa:*

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ zenbaki bikoitia.}$$

Baliokidetasun erlazioa da.

Definizioa 1.4.4. *Izan bitez A multzoa eta $\sim$ baliokidetasun erlazioa. Orduan $a \in A$ bada, a-ren baliokidetasun klasea, $\overline{a}$ edo $[a]$ denotatzen dena ondorengo multzoa da:*

$$\overline{a} = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Oharra $a \in \overline{a}$ beti ematen da ondorioz $[a] \neq \emptyset$.

Teorema 1.4.5. *Izan bedi A multzoa, $a, b \in A$ eta $\sim$ A-n definitutako baliokide erlazioa. Orduan:*

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Leftrightarrow [a] = [b].$$

Oharra: $A = \cup_{a \in A}[a]$ froga daiteke, gainera, aurreko teorema erabiliz bildura disjuntua da.

Izan bedi A multzoa eta $\sim$ A-n definituriko baliokidetasun erlazioa, baliokidetasun klaseak osatzen duten multzoa, $A/\sim$ denotatzen dena, *zatidura multzoa* deitzen da. Hots:

$$A/\sim = \overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}.$$

Elementu bat klase batean badago, klasearen *ordezkari* bat dela esaten dugu. Hots C klase bat bada, $a \in A$ bere ordezkaria da b.s.b $C = \overline{a}$ bada. Deskribatu nahi badugu $\overline{A}$ errepikapenik gabe, orduan baliokidetasun klase bakoitzeko ordezkari bakar bat hartu behar dugu. Orduan, *ordezkarien sistema oso bat* hartu dugula esaten dugu edo beste era batera ordezkarien sistema oso

[8]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

bat A multzoko X azpimultzo bat da non A-ko edozein elementu X multzoko elementu bakar batekin erlazionatuta dagoen. Argi eta garbi baliokidetasun klase guztien bildura A multzoa da. Beraz, honekin eta aurreko teoremarekin, hurrngo teorema ondorioztatzen da:

Adibideak 1.4.6. *Kalkulatu ondorengo baliokidetasun erlazioeen baliokidetasun klaseak etazatidura multzoak.*

(i) $a \sim b \quad \Leftrightarrow a = b.$

$$\overline{a} = \{b \in A \mid a \sim b\} = \{b \in A \mid a = b\} = \{a\}$$

eta

$$\overline{A} = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

[9]

(ii) $A = Z$ *eta* $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ zenbaki bikoitia. *Orduan, adibidez* $a = 2$ *bada:*

$$\overline{2} = \{a \in Z \mid a \sim 2\} = \{a \in Z \mid a - 2 \ \text{ bikoitia}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$$

Orokorrean, x bikoitia bada:

$$\overline{x} = \{a \in Z \mid a - x \ \ \textit{bikoitia}\} = \{a \in Z \mid a \ \text{ bikoitia }\} = \overline{2} = \overline{4} = ...$$

Bestetik, $a = 1$ *bada:*

$$\overline{1} = \{a \in Z \mid a \sim 1\} = \{a \in Z \mid a - 1 \ \text{ bikoitia }\}$$

$$= \{a \in Z \mid a \ \ \textit{bakoitia}\} = \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$$

Orokorrean, x bakoitia bada:

$$\overline{x} = \{a \in Z \mid a - x \ \text{ bikoitia}\} = \{a \in Z \mid a \ \text{ bakoitia}\} = \overline{1} = \overline{3} = ...$$

Eta zatidura multzoa:

$$\overline{Z} = \{\overline{1}, \overline{2}\}$$

[9]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

(iii) Izan bedi $A = Z$ eta $n \in (N)$. Multzo honetan ondorengo erlazioa definitzen dugu:

$$a \sim_n b \Leftrightarrow \exists \lambda \in Z \text{ non } a - b = n\lambda \text{ den.}$$

Adibidez $n = 3$ bada, $\sim_3$ erlazioa:

$$a \sim_3 b \Leftrightarrow \exists \lambda \in Z \text{ non } a - b = 3\lambda \text{ den.}$$

baliokidetasun klaseak kalkulatzen baditugu:

$$\overline{0} = \{z \in Z \mid 0 \sim_3 z\} = \{z \in Z \mid \exists \lambda \in Z, 0 - z = 3\lambda\} = \{3m \mid m \in Z\}$$

$$\overline{1} = \{z \in Z \mid 1 \sim_3 z\} = \{z \in Z \mid \exists \lambda \in Z, 1 - z = 3\lambda\} = \{1 + 3m \mid m \in Z\}$$

$$\overline{2} = \{z \in Z \mid 2 \sim_3 z\} = \{z \in Z \mid \exists \lambda \in Z, 2 - z = 3\lambda\} = \{2 + 3m \mid m \in Z\}$$

[10]

Gainera aurrekoak dira dauden baliokidetasun klase desberdin guztiak, zeren:

$\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{1 + 3z}, \quad z \in Z.$

$\overline{2} = \overline{5} = \overline{8} = \overline{2 + 3z}, \quad z \in Z.$

$\overline{3} = \overline{0} = \overline{9} = \overline{3 + 3z}, \quad z \in Z.$

Beraz $n = 3$ denean zatidura multzoa:

$$\overline{Z} = \{\overline{a} \mid a \in Z\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} = Z/3Z \equiv Z_3$$

$n = 3$ kasuan egin dugun bezala orokorrean egin daiteke eta definitu Z/nZ edo Z_n zatidura multzoa:

$$\overline{Z} = \{\overline{z} \mid z \in Z\} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}.$$

Non $k \in Z$ bakoitzarentzat:

$$\overline{k} = \{k + nz \mid z \in Z\}$$

Eta zatidura multzoa:

$$\overline{Z} = \{\overline{1}, \overline{2}\}$$

[10]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

(iii) Izan bedi $A = R^2 - \{(0,0)\}$ *eta ondorengo erlazioa:*

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in R - \{0\} \ \mid \ x_1 = \lambda x_2 \ \ \textit{eta} \ \ y_1 = \lambda y_2$$

Baliokidetasun erlazioa da eta $(x_1, y_1) \in A$ *bada orduan:*

$$\overline{(x_1, y_1)} = \{(x_2, y_2) \ \mid \ (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)\}$$

$$= \{(x_2, y_2) \ \mid \ \exists \lambda \in R - \{0\} \ \textit{non} \ x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2\}$$

$$\{(\lambda x_1, \lambda y_1) \ \mid \ \lambda \in R - \{0\}\}$$

Adibidez $\overline{(1,0)} = \{(\lambda, 0) \ \mid \ \lambda \in R - \{0\}\}$.

Zatidura multzoa:

$$\overline{A} = \{\overline{(x, y)} \ \mid \ (x, y) \in R^2 - \{(0,0)\}\}$$

Hau da, baliokidetasun klase desberdin guztiak jatorritik pasaten diren zuzenak (jatorria kenduta) dira. Zatidura mulzoa beste era honetara idazten da $P^1(R)$ *eta* 1 *dimentsioko espazio proiektiboa deitzen da.*

11

[11]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia