

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
The University of the Basque Country

TÉCNICAS DE MEDICIÓN, CONTROL Y COBERTURA DE LOS RIESGOS DE MERCADOS FINANCIEROS

OCW 2016

TEMA

3

MEDIDA DE LA DURACIÓN Y CONVEXIDAD

Autores:

Amaia J. Betzuen Álvarez (Coord.)

Amancio Betzuen Zalbidegoitia

Índice

1. INTRODUCCIÓN	3
2. RIESGOS QUE AFECTAN A UN TÍTULO DE RENTA FIJA.....	4
2.1. Riesgo de tipo de interés	4
2.2. Riesgo de reinversión	4
2.3. Riesgo de amortización anticipada	4
2.4. Riesgo de inflación	5
2.5. Riesgo de insolvencia	5
3. SENSIBILIDAD DE UN TÍTULO	5
3.1. Interpretación matemática	5
3.2. Interpretación gráfica	7
3.3. Debilidades.....	9
4. LA DURACIÓN	9
4.1. La duración como vida media	9
4.2. La duración según Macaulay y Hicks	11
4.3. La duración como medida de la sensibilidad.....	14
4.4. La duración de algunos títulos notables	17
4.4.1. <i>Cupón cero</i>	17
4.4.2. Títulos perpetuos	17
4.5. Algunas debilidades de la duración	18
5. LA DURACIÓN MODIFICADA.....	23
6. LA DURACIÓN SEGÚN FISHER Y WEIL.....	23
7. FACTORES QUE INFLUYEN EN LA MAGNITUD DE LA DURACIÓN	24
7.1. El cupón y el reembolso	24
7.2. El periodo hasta el vencimiento	24
7.3. El fraccionamiento del cupón	24
7.4. El cupón corrido. El efecto cupón	24
7.5. El transcurso del tiempo	25
7.6. Influencia del tanto de interés del mercado	25
7.7. Cancelación anticipada de una inversión.....	25
8. LA DURACIÓN DE UNA CARTERA DE RENTA FIJA.....	26
9. CONVEXIDAD.....	32
9.1. Introducción	32
9.2. Convexidad de una cartera de títulos de renta fija	40

1. INTRODUCCIÓN

Cuando se analiza una inversión en Renta Fija, uno de los aspectos más importantes a considerar es la rentabilidad. Pero no hay que dejar de lado otros aspectos tan importantes como son el riesgo y la fiscalidad. Ya hemos visto en capítulos precedentes que el tipo de interés del mercado influye en el precio de un título, pero no conocemos el riesgo de una variación de los tipos de interés.

Al considerar el riesgo que representa una inversión en este tipo de productos ante variaciones del tipo de interés de mercado es cuando se introduce un concepto que, en cierta medida, mide el riesgo de esta inversión. Este concepto al que ahora nos referimos es la *duración*. De una forma muy simple la duración se define como una medida de la exposición del precio de un título al riesgo de tipo de interés.

El precio de un título en el mercado varía porque varía el tipo de interés del mercado y esto depende fundamentalmente de las expectativas del mercado, pero también influyen las características intrínsecas del título que se considera de naturaleza intrínseca. Esta última es la que se puede expresar de forma matemática. Es donde tiene aplicación el análisis de la duración.

Para un mismo periodo al vencimiento se puede comprobar que un título cupón acumulado presenta diferente riesgo, ante una variación del tipo de interés, que un título cupón periódico. Por tal motivo averiguar el efecto de la variación de los tipos de interés de mercado sobre el precio de los títulos. Una herramienta sencilla y a la vez útil que midiera de alguna forma dicho efecto es a través del análisis de la duración. Es una herramienta que se utiliza tanto para títulos cupón cero como para títulos cupón periódico. Es a través del análisis de la vida de un título de cupón periódico, en la que los vencimientos de los cupones tienen una clara influencia en el riesgo de la valoración, la que permitió dar con la fórmula.

Finalmente se estableció como definición de duración “la vida media ponderada de cada vencimiento de los flujos correspondientes al título, utilizando como ponderación el valor actual de cada flujo” ⁽¹⁾.

Para seguir el análisis de la duración en estos términos habría que conocer en cada momento la estructura temporal de los tipos de interés ⁽²⁾. Para simplificar los cálculos, en la práctica, se recurre a la sustitución de los tipos a plazo por un tipo de interés de valoración uniforme. En estas condiciones la ecuación a considerar es:

$$P = \sum_{j=1}^n \frac{F_j}{(1+r)^j}$$

que como sabemos nos proporciona el precio de mercado de un título ⁽³⁾.

2. RIESGOS QUE AFECTAN A UN TÍTULO DE RENTA FIJA

¹ Por tratarse de una media ponderada, el valor de la duración vendría expresado en la misma unidad de tiempo que la utilizada para medir los vencimientos.

² Hay que tener en cuenta que la variación de estos tipos de interés son de naturaleza aleatoria y por lo tanto revisten cierta complejidad.

³ Cuando se plantea esta fórmula para el cálculo del precio, en función de la rentabilidad al vencimiento r , estamos asumiendo la hipótesis de que la curva de tipos de interés es plana. Lo anterior significa que los tipos de interés del mercado sin riesgo coinciden con la magnitud del tanto r en cada periodo j .

2.1 Riesgo de tipo de interés

Como es sabido los tipos de interés de mercado varían de forma continua. Esta variación afecta al precio teórico de los títulos, subiendo o bajando de forma contraria a como lo hace el tipo de interés. Pues bien, a esta variación se la conoce como riesgo de interés o bien riesgo de tipo de interés.

Como veremos más adelante este riesgo es tanto mayor cuanto mayor sea el plazo al vencimiento o bien la vida del título. En la práctica para compensarlo se añade una prima al tipo de interés de la emisión. Lo que se pretende con esta prima es la de proporcionar el efecto de aumentar los tipos de interés de las emisiones a largo plazo en relación a las emisiones a más corto plazo.

El problema que presenta es que su medición es bastante compleja puesto que varía a lo largo del tiempo, aumentando cuando los intereses son más volátiles e inciertos y disminuyendo cuando son más estables y seguros.

2.2 Riesgo de reinversión

Un título que abona cupones que se cobran periódicamente, está expuesto al riesgo de reinversión, que es lo que sucede cuando los cupones son invertidos a unos tipos de interés diferentes a los del tanto de rendimiento al vencimiento. Evidentemente cuanto mayor es el plazo al vencimiento mayor es el riesgo de reinversión.

Obsérvese que el riesgo de interés y el riesgo de reinversión proporcionan resultados contrarios. En efecto, cuando un inversor piensa en el riesgo de interés, tiene en mente una posible subida del tipo de interés del mercado y como consecuencia una caída del precio del título, mientras que en el caso del riesgo de la reinversión, el inversor tiene en mente una posible caída del tipo de interés.

Además de los riesgos anteriores los títulos de renta fija están expuestos también al riesgo de insolvencia del emisor y a otros tipos de riesgo de menor influencia.

2.3 Riesgo de amortización anticipada

Afectan a las emisiones de títulos que llevan incorporada una opción de compra como es el caso de los títulos amortizables de forma anticipada por parte del emisor, o bien una opción de venta como sucede con los títulos amortizables anticipadamente por parte del inversor. Esto es debido a que el valor de la opción aumenta conforme aumenta la volatilidad de los tipos de interés. En este caso se produce un descenso en el precio de los títulos con opción de compra y un aumento en las opciones de venta.

2.4 Riesgo de inflación

Se produce cuando varía el poder adquisitivo de los flujos de capitales como consecuencia de la inflación. Si un inversor adquirió un título de renta fija y recibe cupones y al final el reembolso, estos flujos representan unas cantidades fijas sin embargo su poder adquisitivo será diferente. Para poder paliar esta situación se puede invertir en títulos de cupón flotante tipo FRN.

Este tipo de título incorpora, en cada periodo, la expectativa de la inflación con lo cual el impacto de este riesgo es muy reducido.

2.5 Riesgo de insolvencia

Es el riesgo de que el emisor no pague los capitales comprometidos, bien los intereses bien el reembolso del título, tanto en volumen como en plazos.

Este riesgo afecta al tipo de interés del título puesto que los inversores exigirán a mayor riesgo mayor tipo de interés del título.

3. SENSIBILIDAD DEL PRECIO DE UN TÍTULO

3.1. Interpretación matemática

En el campo discreto, viene dado por la relación entre las variaciones absolutas del precio de un título y las variaciones absolutas del tanto r (*tir*). Matemáticamente la sensibilidad es la derivada del precio de un título con respecto a r :

Teniendo la fórmula del precio de un título en función de r :

$$P = \sum_{j=1}^n F_j (1+r)^{-j}$$

la derivada resulta:

$$S = \frac{dp}{dr} = \sum_{j=1}^n (-j) \frac{F_j}{(1+r)^{j+1}} < 0 \quad (3.1)$$

Es importante destacar que la sensibilidad proporciona información en términos absolutos, sobre en qué medida (cuanto) variará el precio de un título. También se observa que su evolución es decreciente.

Para los cálculos podemos escribir la fórmula de la siguiente manera:

$$S = -\frac{1}{1+r} \sum_{j=1}^n \frac{j \cdot F_j}{(1+r)^j}$$

Ejercicio N° 1

Se ha comprado en el día de hoy, 20 de diciembre de 2011, un título emitido el 1 de junio de 2010. El nominal del título asciende a 100 euros y se pagan cupones anuales al 2% de interés efectivo anual. El título se amortizará a la par el 1 de junio de 2016.

Analizar si es posible averiguar la sensibilidad del título el día de la adquisición si el tanto de rendimiento es del 1,85%.

Respuesta

Si construimos paso a paso, y teniendo como ejemplo la primera línea, un cuadro como el siguiente:

Tabla 1

Vencimientos	t	F _j	V ^t	F _j *V ^t	En ter. unitarios
01/06/2010	0,4466	5	0,9820	4,910	0,022

Fuente: elaboración propia

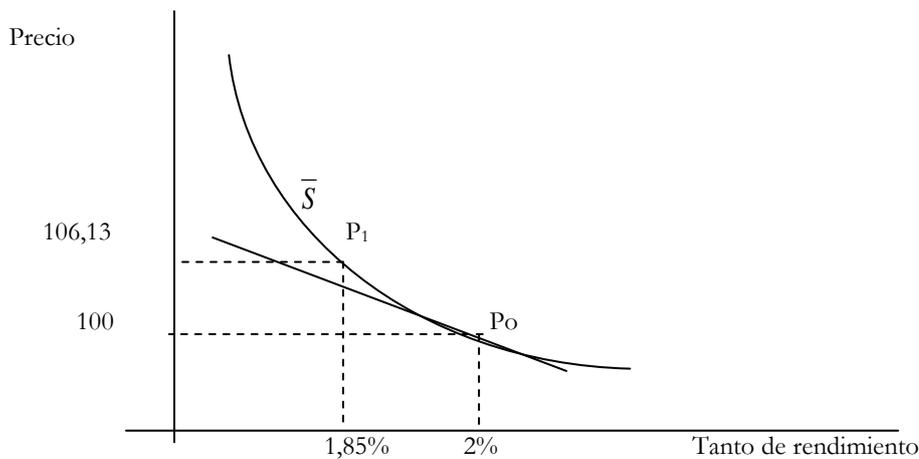
Vemos que la sensibilidad del título resulta: - 4,078.

La última columna se obtiene de multiplicar la quinta por la segunda y dividiendo por el nominal del título. El resultado obtenido se divide por el factor (1+r).

3.2. Interpretación gráfica

Lo representamos en un sistema cartesiano precio-tanto de rendimiento

Gráfico 1



Fuente: elaboración propia

La pendiente de la recta \bar{S} nos indica la sensibilidad del título que vale. Veamos la utilidad de la información obtenida de esta forma. Se puede aproximar de forma lineal la relación precio-tanto de rendimiento para un entorno del punto P_r . Por ejemplo, supongamos que queremos saber qué efecto produce, en el precio de un título cierta variación en el tanto de rendimiento.

Utilizando la información que nos facilita la sensibilidad del título calculamos el nuevo precio:

$$P_1 \cong P_0 + S * \Delta r \quad (4)$$

Como consecuencia de lo anterior cuanto mayor sea el intervalo de variación de r mayor será la desviación con la que se trabaje podría llegar a invalidar el análisis. De ahí que esta aproximación tenga validez para pequeñas variaciones de r .

Ejercicio N° 2

4 Si en las condiciones del caso anterior, se produjera una alteración brusca en el tipo de interés del mercado de 10 p.b. de aumento, averiguar el nuevo precio que alcanzaría, el título en el mercado:



Respuesta

1º) A través de la sensibilidad del título.

Utilizamos la siguiente aproximación:

$$P_1 \cong P_0 + S * \Delta r$$

Sustituyendo valores:

$$P_1 \cong 106,13\% - 4,078 * 0,1\% = 105,11\%$$

2º) Realizando el cálculo exacto.

El nuevo tipo de interés del mercado es: $1,85\% + 0,1\% = 1,95\%$

Para ello utilizamos la fórmula:

$$P = \sum_{j=1}^n F_j (1+r)^{-j}$$

Sustituyendo valores

$$P = \sum_{j=1}^5 F_j (1+r)^{-j} = \left[5 a_{\overline{5}|0,0195} + 100 (1 + 0,0195)^{-5} \right] (1 + 0,0195)^{202/365} = 105,12\%$$

Veamos el error que se comete.

$$105,12\% - 105,11\% = 0,01\%$$

que resulta poco significativo.

3.3. Debilidades

La sensibilidad es un instrumento válido para averiguar la variación del precio de un título en términos absolutos cuando se produce una variación en términos absolutos en los tipos de interés del mercado. Esto se puede observar en el caso práctico anterior.

La sensibilidad, como hemos podido comprobar proporciona las variaciones del precio de los títulos en términos absolutos. Esto limita la capacidad de análisis a la hora de comparar títulos con precios y características distintas.

En los casos anteriores la respuesta era relativamente sencilla porque ambos títulos cotizaban a la par, pero no sucede así cuando las cotizaciones son diferentes. Para superar en cierta medida esta situación se recurre al análisis de la duración.

4. LA DURACIÓN

La duración tiene diferentes interpretaciones dependiendo del punto de vista desde el que lo analicemos.

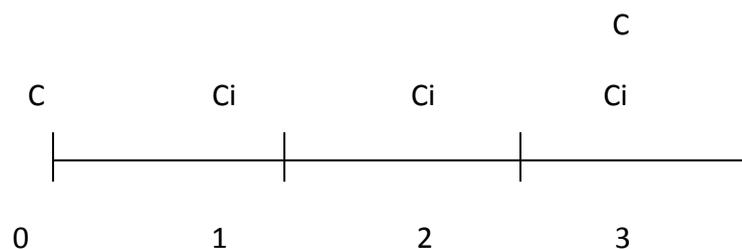
4.1. La duración como vida media

En el cálculo se tienen en cuenta las ponderaciones. La ponderación representa la proporción que del precio de un título representa el valor actual de cada uno de los flujos de capitales futuros.

Ejemplo

Sea un título con vencimiento a 3 años.

Gráfico 2



Fuente: elaboración propia

Las ponderaciones se calculan de la siguiente forma:

$$w_1 = \frac{Ci(1+r)^{-1}}{P} \quad w_2 = \frac{Ci(1+r)^{-2}}{P} \quad w_3 = \frac{(C+Ci)(1+r)^{-3}}{P}$$

Cumplíndose la condición siguiente:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

En general

Desde el punto de vista práctico, los pesos relativos (ponderaciones) correspondientes al valor actual de cada flujo del título, con respecto al precio total del título, lo expresamos como

$$W_j = \frac{F_j (1+r)^{-j}}{P} \quad \text{cumpliéndose} \quad \sum_{j=1}^n W_j = 1$$

Ejercicio N° 3

Sea un título de nominal $N=1.000$ €, que paga cupones al 2,5% durante 3 años. Se cotiza a la par.

Respuesta

Las ponderaciones serán:

$$w_1 = \frac{25(1+0,025)^{-1}}{1000} = 0,02440 \quad w_2 = \frac{25(1+0,025)^{-2}}{1000} = 0,02380$$

$$w_3 = \frac{1.025(1+0,025)^{-3}}{1000} = 0,9518$$

comprobación

$$0,02440 + 0,02380 + 0,9519 = 1$$

Si se calcula la media ponderada, mediante la fórmula siguiente

$$\bar{e}_p = 1 * w_1 + 2 * w_2 + \dots + n * w_n = \sum_{j=1}^n j * w_j$$

Y tomando como ponderaciones los obtenidos anteriormente, sustituyendo valores resulta

$$\bar{e}_p = 1 * 0,02440 + 2 * 0,02380 + 3 * 0,9519 = 2,9277$$

Esta media ponderada recibe el nombre de duración. Esto es, la duración es la media de los periodos de pago de los flujos de capitales de un título ponderado, por el peso que representa el valor actual de los mismos en el precio del bono.

Cada uno de estos autores expresó matemáticamente ⁽⁵⁾, de forma independiente, la relación entre el precio de un título y el tanto interno de rendimiento en términos de elasticidad. En concreto, como la elasticidad de las variaciones del precio del título frente a los del tanto interno de rendimiento.

Es evidente que en el caso de un título con pago periódico de cupones y reembolso de capital, unos capitales vencen antes que otros luego, no parece acertado considerar como vencimiento del título, considerado en su conjunto, el momento de reembolso. Para salvar esta especie de ambigüedad que se presenta en este tipo de título (algo parecido sucede en un título que se amortice por reducción del nominal), se calcula el vencimiento medio de los flujos de capitales futuros. Este vencimiento medio se considera como vencimiento efectivo del bono, esto es la duración del mismo.

La fórmula, en el campo discreto, es:

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{j * F_j}{(1+r)^j}}{P}$$

en donde,

D : Representa la duración del título

P : Representa el precio de mercado del título ⁽⁶⁾

r : Tanto de rendimiento interno del título desde el momento de la valoración hasta el vencimiento

F_j : Flujo de capital con vencimiento en j

n : Plazo hasta el último vencimiento.

Como se puede observar la fórmula anterior representa una media ponderada de la vida de un título.

⁵ Este concepto fue introducido en 1938 por Frederick Macaulay. Hizo referencia al vencimiento promedio de la corriente de flujos de capitales de un título, en su obra "Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and stock Prices in the U.S. Since 1856". National Bureau of Economic Research, Nueva York, 1938.

⁶ En realidad lo que calculamos aquí es el precio teórico.

En función de las ponderaciones se suele expresar:

$$D = \sum_{j=1}^n j * W_j$$

La duración se mide en unidades de tiempo como, normalmente en años.

Ejercicio N° 4

Un inversor adquiere un título cuyas características más significativas desde el punto de vista financiero son:

- a) Nominal de cada bono: C=1.000 €
- b) Cupón anual: $Ci = 25 \text{ €}$
- c) Duración de la operación: 5 años.

Se pretende calcular la duración tomando un tanto de rendimiento al vencimiento del 2,3% anual.

Respuesta

Para calcular la duración utilizamos la fórmula:

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n F_j (1+r)^{-j} * j}{P}$$

Estos valores se pueden presentar en forma de tabla cuando se utiliza una hoja de cálculo para



t	F_t	$(1+r)^{-t}$	$F_t(1+r)^{-t}$	$F_t(1+r)^{-t} * t$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0				
1	25	0.976	24.39	24.39

También se puede construir una tabla de la siguiente forma:

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](#).



Periodos (1)	Flujos (2)	Valor actualizado (3)	Peso sobre el precio (4)	Tiempo Ponderado (5)=[(1)*(4)]*100
1	25	24,390	2,44	0,024

4.3. La duración como una medida de la sensibilidad relativa de un título

Es frecuente definir la duración como una medida de la sensibilidad relativa de un título. Veamos lo que esto significa. Para ello relacionemos las variaciones relativas del precio con las variaciones relativas de r .

De forma aproximada se suele escribir:

$$D \cong \frac{\text{Variación relativa del precio}}{\text{Variación relativa de } r} = -\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta r}{1+r}}$$

La fórmula se suele presentar con signo negativo porque las variaciones del precio y del tanto son inversas.

La expresión anterior se puede escribir:

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -D * \frac{\Delta r}{1+r}$$

En la fórmula anterior se presenta la duración como el porcentaje de variación en el precio ocasionado por una variación relativa en el tanto interno de rendimiento. Observando esta fórmula vemos que el factor que relaciona las variaciones de los precios con las variaciones de los tantos es la duración, luego de aquí se obtienen las siguientes conclusiones para el inversor en renta fija:

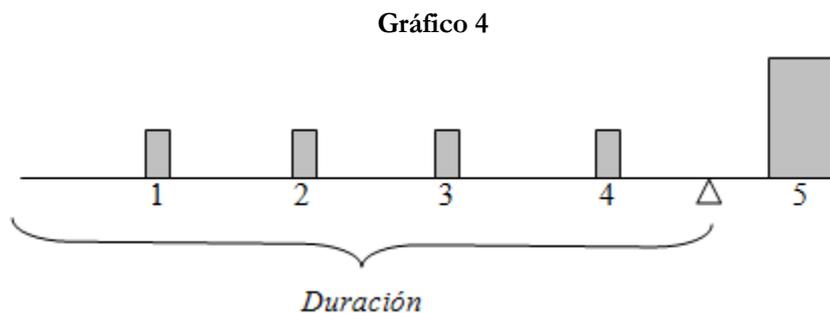
-Si las previsiones son de una subida en los tipos de interés, es más interesante, invertir en títulos con reducida duración.

-Si las previsiones son de una bajada en los tipos de interés, es más interesante invertir en títulos de duración mayor.

En la fórmula anterior se puede observar que si el tipo de interés sube $\Delta r > 0$ implica que: $\frac{\Delta P}{P} \uparrow$ cuanto mayor sea D.

Una forma intuitiva de apreciar esta medida es como sigue:

Se dibujan unas barras cuya área representa el flujo del título a cada vencimiento. Lógicamente el último incluye el valor de reembolso.



Fuente: elaboración propia

El área sombreada representa el importe del flujo en unidades monetarias del momento actual, o sea, el equivalente al valor actual del flujo. El punto de equilibrio es aquel en el que el valor actual de los flujos que quedan a la izquierda representa la misma cuantía que el valor actual de los flujos que quedan a la derecha.

La duración corresponde, en este caso, al plazo comprendido entre el momento de la valoración y el hipotético punto de apoyo.⁽⁷⁾ Corresponde al punto de equilibrio en la vida de un título. En efecto se obtiene al dividir el valor financiero actual en dos partes, de manera que a cada una de las dos partes le correspondiera el mismo peso en términos de valor actual.

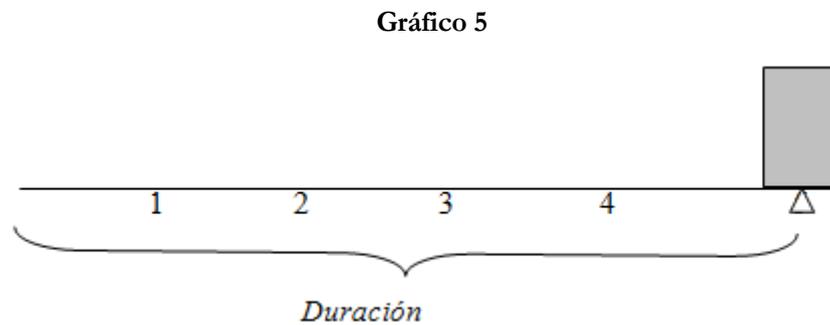
Los datos que se necesitan conocer para calcular la duración son:

⁷ Obsérvese que no corresponde al centro del listón.



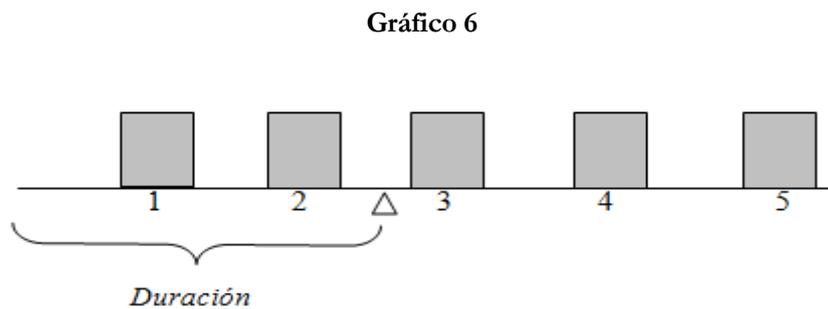
- Fecha de valoración
- Fecha de vencimiento de cada flujo
- Cuantía de los flujos
- Tanto de rendimiento (o en su caso, precio de mercado del título) ⁽⁸⁾

El gráfico en el caso de cupón acumulado sería:



Fuente: elaboración propia

El gráfico en el caso de amortización por reducción del nominal sería:



Fuente: elaboración propia

Ejercicio N° 5

Para el caso de los 2 títulos vistos en el caso práctico anterior. En el que la duración era 4,762.

¿Qué impacto tendría, en su precio, una bajada de 15 p.b. en el tipo de interés del mercado?

Respuesta

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



$$\frac{\Delta r}{1+r} = \frac{0,0015}{1+0,015} = 0,00148$$

4.4 La duración de algunos títulos notables

4.4.1 *Cupón cero*

La duración de un título cupón cero, como ya se indicó, coincide con el periodo de tiempo hasta el vencimiento. Como se sabe este tipo de títulos presenta un único flujo de capital y por lo tanto la ponderación es del 100% al vencimiento del capital.

A la vista del cuadro anterior, si se toma un título cupón cero con vencimiento a los 4,762 semestres, este título es exactamente igual de sensible a un título cupón periódico con vencimiento a los 5 semestres y duración 4,762 semestres, a las variaciones de tipos de interés.

4.4.2 *Títulos perpetuos*

En el caso de bonos perpetuos la duración es el resultado de calcular el cociente:

$$\frac{1}{r}$$

en donde, r representa el tanto de rendimiento (tipo de interés del mercado).

Cuando se emiten títulos a cupón variable, esto es, que el tipo de interés del cupón depende de alguna magnitud de referencia futura, en principio, el cálculo de la duración, no es posible averiguarlo con alguna precisión, puesto que no se conoce el valor futuro de los cupones aún cuando a veces se podría intentar realizar alguna estimación.

No resulta tan simple de apreciar la duración cuando:

- El título otorga cupones variables
- En casos de opción de amortización anticipada
- Cuando se practica la reinversión de cupones

4.5 Algunas debilidades de la duración

Si se parte de la consideración de que la duración hace referencia únicamente al riesgo asociado con el cambio en el tipo de interés.

Como hemos podido observar la duración es una medida de la sensibilidad a las variaciones de tipos de interés pero, por ejemplo, no incluye el riesgo de insolvencia del emisor. Tampoco recoge la posibilidad de que el título sea reembolsado de forma anticipada, ni los posibles cambios en la cuantía o vencimiento de los flujos esperados, como pudiera suceder si se trata de un título convertible.

La duración tampoco refleja el hecho de que el tipo de interés de las emisiones más cortas pueda ser más volátil que las de las emisiones más largas ⁽⁹⁾. En efecto, el rendimiento de las Letras del Tesoro, por ejemplo, suele ser más volátil que el rendimiento de las obligaciones del Estado. A la hora de valorar el riesgo final de la emisión es necesario tener en cuenta, en conjunto, ambos factores.

Cuando se utiliza la duración como medida del riesgo de mercado se está admitiendo que la curva de tipos de interés es plana ⁽¹⁰⁾. Esto significa que cuando se desplaza lo hace únicamente de forma paralela.

Tal y como hemos visto la duración se calcula con cierta sencillez cuando se toman títulos de renta fija. La cosa se complica cuando se utilizan títulos de renta variable ⁽¹¹⁾. Luego en estos casos el análisis de la sensibilidad de una cartera mixta, la cual como sabemos está formada por títulos de renta fija y renta variable es ciertamente complicada.

5. LA DURACIÓN MODIFICADA

La duración modificada (DM) viene dada por la expresión:

$$DM = \frac{D}{1+r}$$

De esta manera se considera la duración modificada o corregida como una medida de la volatilidad de los títulos. Cuando hablamos de la volatilidad de los títulos de renta fija, nos estamos refiriendo a la sensibilidad de su precio de mercado, en relación a los cambios que se produzcan en el tipo de interés del mercado ⁽¹²⁾.

⁹ Aquí sí es cierto que el riesgo ante variaciones en el tipo de interés, es mayor cuando la duración es alta que cuando es baja.

¹⁰ Esto no es así lógicamente, en la realidad la ETTI no es plana y los cambios que se producen en ella no son paralelos.

¹¹ Como pueden ser las acciones ordinarias.

¹² Recordemos que lo estamos considerando como tanto de rendimiento.

Se dice que esta magnitud recoge directamente el impacto de las variaciones de los tipos de interés sobre el precio del título.

En realidad la DM es:

$$\frac{dP}{dr} \frac{1}{P}$$

En efecto. Puesto que:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-1}{1+r} \sum \frac{j * F_j}{(1+r)^j}$$

Se tiene:

$$DM = \frac{dP}{dr} \frac{1}{P} = \frac{-1}{1+r} \frac{\sum \frac{j * F_j}{(1+r)^j}}{P} = \frac{D}{1+r}$$

La duración modificada se presenta en el campo discreto de forma aproximada

$$DM \cong - \frac{\frac{P_1 - P_0}{P_0}}{r_1 - r_0} = \frac{\frac{\Delta P}{P_0}}{\Delta r} \rightarrow \Delta P = -DM * P_0 * \Delta r$$

La DM se expresa en % y no en unidades de tiempo.

La derivada de esta expresión proporciona:

$$\frac{dDM}{dr} = -DM * P$$

Esto es, la pendiente de la tangente a la función, en el punto definido por el precio del título y su tanto de rendimiento.

Algunos gestores de fondos de inversión que se ven en la necesidad de calcular el valor de su cartera de renta fija, periódicamente, consideran esta medida como la adecuada a la hora de medir el riesgo.

Ejercicio N° 6



- a) Nominal de cada bono: C=1.000€
- b) Cupón semestral: Ci⁽²⁾=12€
- c) Duración de la operación: 3 años.

Respuesta

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Desde el punto de vista práctico, es útil hacer uso de la hoja de cálculo y operar tal y como se indica en el siguiente cuadro.

Tabla 4

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](#).



	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	1	15	0,987	14,80	14,80
	2	15	0,974	14,60	29,21
	3	15	0,961	14,41	43,23
	4	15	0,948	14,22	56,87

$F_t (1 + r)^{-t}$

6. LA DURACIÓN SEGÚN FISHER Y WEIL

Estos autores introdujeron una modificación en el cálculo de la duración que consistía en actualizar, cada uno de los flujos teniendo en cuenta la estructura temporal de los tipos de interés.

La fórmula propuesta fue

$$D_{FW} = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^n \frac{j \cdot F_j}{\prod_{h=1}^j (1+r_h)}$$

$$= \frac{1}{P} \left[\frac{1 \cdot F_1}{1+r_1} + \frac{2 \cdot F_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{n \cdot F_n}{(1+r_1)\dots(1+r_n)} \right]$$

en donde el tanto r_j representa el tipo de interés correspondiente al periodo j .

Esta fórmula de Fisher y Weil recoge, en parte, la estructura temporal de los tipos de interés. Según los expertos esta medida de la duración es más realista, pero desde el punto de vista práctico no goza de mucha aceptación, dadas las dificultades que entraña el estimar los tipos de interés correspondientes a cada periodo de tiempo.

7. FACTORES QUE INFLUYEN EN LA MAGNITUD DE LA DURACIÓN

Observando la fórmula que se utiliza para el cálculo de la duración, se concluye que las "variables" que condicionan la magnitud de la duración son:

- El cupón y el reembolso
- El periodo hasta el vencimiento del título
- La frecuencia de los flujos. Cuanto mayor es la frecuencia del cobro de cupones la duración del flujo de capitales será menor.
- El tipo de interés del mercado (rendimiento del título).
- El cupón corrido desde el último vencimiento.
- El transcurso del tiempo.
- La amortización parcial de la emisión. La amortización anticipada.

7.1. El cupón y el reembolso

Recordemos que el cupón depende de dos magnitudes que son, el nominal del título y el tipo de interés. Se puede apreciar esta influencia tomando un título y aplicando diferentes tipos de interés del mercado.

Se observa que cuando el tipo de interés es nulo ($i=0\%$) la duración coincide con el periodo de vencimiento a la emisión. La conclusión que se obtiene de lo anterior es:

- 1) La duración del título está inversamente relacionado con el tipo de interés del cupón. Esto es lógico teniendo en cuenta que para calcular la duración se tiene en cuenta los valores actuales de los flujos.
- 2) Cuanto menor es la magnitud del cupón mayor es la duración pero esta relación no es proporcional.

7.2. El periodo hasta el vencimiento del título

Consideremos ahora dos títulos con diferente periodo de vencimiento. Se puede comprobar que cuanto mayor es el plazo hasta el vencimiento de los flujos mayor es la duración y mayor es la volatilidad del título. No obstante, esta relación no es lineal⁽¹³⁾, pues como se puede comprobar el tanto de crecimiento de la duración es decreciente⁽¹⁴⁾ a medida que aumentan los plazos de vencimiento. Esto no ocurre, evidentemente, en los títulos cupón cero.

7.3. El fraccionamiento del cupón

La duración disminuye conforme aumenta el fraccionamiento del cupón.

7.4 El cupón corrido⁽¹⁵⁾. El efecto cupón

Se puede comprobar que el pago de un cupón provoca un cambio brusco en el valor de la duración. En concreto, supone un incremento en la magnitud. Para ello podemos considerar un caso práctico tomando varias fechas entre las cuales se cumpla el vencimiento de un cupón.

El cupón corrido está inversamente relacionado con la duración. Esto significa que cuanto mayor es la magnitud del cupón corrido menor es la duración. También se dice que cuanto mayor es la proporción del cupón corrido respecto al precio del título, menor es la duración.

También podemos decir que un título que tenga cupón corrido tiene una duración más pequeña que otro título de las mismas características que carezca del mismo. Esto es así porque al cobrar el cupón se pierde un flujo, el más próximo al momento actual con lo cual la duración se desplaza hacia su vencimiento.

Se conoce como efecto cupón al porcentaje de variación en el precio de un título como consecuencia del pago del cupón. Por ejemplo, este porcentaje será menor cuanto mayor sea el tipo de interés del cupón. En consecuencia cuanto menor sea el cupón mayor será la variación del precio, con lo cual en un título cupón cero, es donde más varía el precio del título al variar el tipo de interés del mercado.

¹³ Incluso esto no se cumple cuando los cupones son muy bajos, el plazo hasta el reembolso muy grande y el precio del título inferior a la par.

¹⁴ Crece menos que proporcionalmente.

¹⁵ Hay que tener presente si en el cálculo de la duración se está incluyendo el precio total. En algunas publicaciones se presenta como dato del precio de un título el precio ex-cupón, esto significa que no lleva incluido el cupón corrido.

Como consecuencia de lo anterior dos títulos que tienen la misma fecha de vencimiento, pero diferentes cupones, pueden reaccionar de forma diferente ante un cambio en los tipos de interés. Sin embargo, los títulos que presenten una duración similar reaccionan de forma semejante.

7.5 El transcurso del tiempo

Como es lógico pensar, a medida que transcurre el tiempo la duración se va acortando. Cada vez quedan menos flujos de capital pendientes y por otra parte el capital de reembolso también se va acercando cada vez más al momento de valoración.

7.6 Influencia del tanto de interés del mercado ⁽¹⁶⁾

Como se puede comprobar la duración de un título con pago periódico de cupones está inversamente relacionado con respecto a las variaciones en el tipo de interés del mercado. A mayor rendimiento menor duración y volatilidad.

Un incremento del tipo de interés del mercado disminuye la duración de un título. Si nos fijamos en la fórmula el tanto r le afecta directamente. Luego cuanto mayor es r menor es el factor de actualización ⁽¹⁷⁾ y menor es cuanto más alejado está, con lo cual al ser la duración la suma de los valores actualizados, dicha duración será menor. Este descenso lo es tanto en valor absoluto como en valor relativo.

7.7. Cancelación anticipada de una inversión

Supongamos que un inversor dispone de un título que decide amortizarlo al cabo de un tiempo T . La duración del título es D . Se puede comprobar, que si el tipo de interés del mercado cambia, la rentabilidad que se obtiene por el título al cancelarlo anticipadamente también cambia.

Además se puede comprobar que, en general, cuanto mayor sea la diferencia $T-D$, mayor es la sensibilidad del título ante variaciones del tipo de interés del mercado.

En efecto, si $T > D$ y si el tipo de interés del mercado sube la rentabilidad de un título aumenta ⁽¹⁸⁾ y viceversa.

Por el contrario, si $T < D$, se puede comprobar que si el tipo de interés del mercado sube, la rentabilidad baja y viceversa.

Si se cumple que $T = D$ entonces se puede comprobar que la rentabilidad del título no se altera, suba o baje los tipos de interés del mercado. En estos casos se dice que el título está inmunizado.

Al tratar la duración modificada se planteó la conveniencia de utilizar este tipo de duración, para determinar el efecto de la variación del tipo de interés del mercado, en el valor de una cartera de renta fija a corto y medio plazo. Para carteras de entidades aseguradoras, fondos de pensiones de aportación definida, etc., que corresponden a carteras cuya gestión se proyecta a largo plazo, se

¹⁶ Nos referimos al rendimiento hasta el vencimiento.

¹⁷ Las ponderaciones se reducen.

¹⁸ El valor final de la reinversión es mayor.

estudia la diferencia entre T y D , esto es, la medida del riesgo se obtiene de comparar la duración de la cartera y el plazo de inversión que el gestor establece para la cartera.

8. LA DURACIÓN DE UNA CARTERA DE RENTA FIJA

Una cartera de renta fija se puede considerar, a efectos de cálculos, como formada por un conjunto de flujos de capitales futuros. Se puede medir la duración a través de la media ponderada de los vencimientos de los flujos de capitales de la cartera, utilizando como ponderaciones los valores actuales de dichos flujos.

Cuando se trata de una cartera, el tanto de rendimiento a utilizar en la valoración, es el que corresponde a la cartera. Pero, hay que tener en cuenta que, la cartera esta compuesta por un conjunto de capitales, cupones, reembolsos, etc. con múltiples vencimientos, resultando que el tanto de rendimiento de la cartera no es el rendimiento medio ponderado de cada uno de los títulos que la constituyen¹⁹.

Desde este punto de vista, la duración de una cartera de renta fija se puede plantear de la siguiente forma:

$$Dc = \sum_{j=1}^n \frac{j * C_j (1+r)^{-j}}{Vc}$$

siendo,

Dc : Duración de la cartera

C_j : Flujos de capitales de la cartera formado por amortizaciones e intereses. En este caso del momento j .

n : Plazo al vencimiento de cada uno de los capitales

Vc : Valor de la cartera en condiciones del mercado

r : Tanto de rendimiento de la cartera.

Para calcular la duración de la cartera, se asume la propiedad aditiva de la duración. En base a ella conociendo las duraciones correspondientes a cada título de la composición de la cartera se puede calcular la duración de la cartera de la siguiente forma:

$$Dc = \sum_{j=1}^n W_j * D_j$$

¹⁹ Recordemos que se está refiriendo a rendimientos al vencimiento.

donde,

W_j : Representa el peso específico, en términos de valor de mercado, del título j ⁽²⁰⁾

D_j : La duración del título j .

Para calcular el peso específico de cada título, en términos de valor de mercado se calcula de la siguiente forma:

$$W_j = \frac{V_j}{V_c}$$

donde,

V_j : Representa el valor de mercado del título j

V_c : Representa el valor de mercado de toda la cartera.

La sensibilidad de la cartera o bien la duración modificada se plantea de la siguiente forma:

$$DM_c = \sum_{j=1}^n W_j * DM_j$$

donde,

DM_c : Duración modificada de la cartera

DM_j : Duración modificada del título j .

Un gestor de carteras de renta fija si conoce su duración o su sensibilidad podría conocer el efecto que, una variación en tipo de interés podría tener sobre la cartera. Para simplificar se supone que la variación del tipo de interés es la misma para todos los títulos de la cartera. Entonces el efecto de esta variación se calcularía mediante la fórmula:

$$\Delta V_c = -D_{cc} * \Delta i * V_c$$

Ejercicio N° 7

Se considera una cartera formada por tres tipos de títulos, todos de igual nominal $N=1.000$ euros, y con plazos bonos a 3, 5 y obligaciones a 10 años respectivamente.



Tabla 5

N° de títulos	Tipo de interés	Plazo al vencimiento	Tanto de rendimiento
---------------	-----------------	----------------------	----------------------

Respuesta

Los flujos de capitales futuros los representamos en los siguientes gráficos:

Gráfico 8

B1:

20 20 1 030

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



Fuente: elaboración propia

Gráfico 9

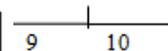
Evidentemente este valor es el mismo que el que se obtiene tomando los flujos de capitales de la cartera y actualizándolos al tanto de rentabilidad de la cartera.

En efecto, los flujos totales de la cartera resultan:

Gráfico 11

4.990 4.990 74.990 2.890 52.890 1.140 1.140 1.140 1.140 31.140

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](#).



Fuente: elaboración propia

Si se compara el valor actual de la cartera con los flujos de capitales futuros de la misma, se obtiene el tanto de rendimiento de la misma. Es un tanto de rendimiento con plazo hasta el final de la misma. Se

Los valores de las duraciones modificadas respectivas resultan:

$$DM_{B1} = \frac{D_{B1}}{1 + r_1} = \frac{2,913}{1 + 0,036} = 2,811\%$$

$D_{B3} = 1,67$



9. CONVEXIDAD

9.1. Introducción

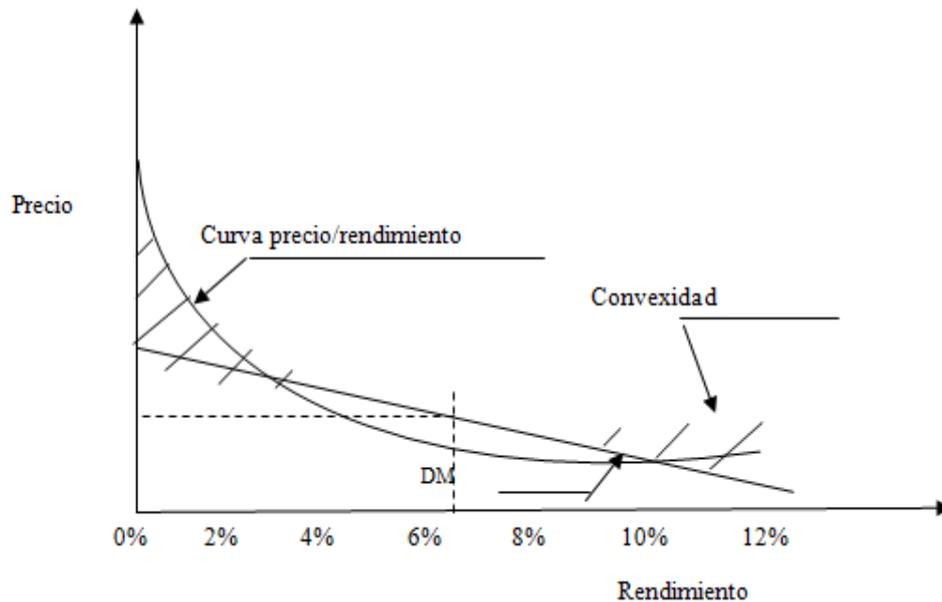
Como se recordará la duración se suele utilizar para averiguar el impacto en el precio de un título o el impacto en una cartera de títulos de renta fija, que puede ocasionar una variación en el tipo de interés del mercado. Pues bien, se puede complementar la información que facilita la duración corregida. Para ello se utiliza la convexidad.



Se conoce por convexidad de un título, a la diferencia entre el precio de mercado del título y el precio proporcionado por su duración modificada. Es habitual encontrar en la literatura la afirmación de que la convexidad es la variación del precio del título no explicada por la duración corregida. Esta última definición se corresponde con la afirmación de que la duración modificada asume que existe una relación lineal entre las variaciones en los tipos de interés y en los precios. Recordemos que se indicó que la duración modificada explica bastante bien las variaciones en el precio debidos a pequeños cambios en los tipos de interés del mercado (menos de 50 puntos básicos).

Para facilitar la comprensión de lo que estamos tratando podemos presentar un gráfico como el que a continuación se muestra.

Gráfico 12



Fuente: elaboración propia

En ordenadas se presenta el precio del título y en abscisas los rendimientos. La línea recta inclinada representa la duración modificada ⁽²¹⁾ de un título. La zona rayada representa la convexidad. La convexidad es la diferencia, en vertical, entre la curva del precio real del título y el precio previsto según su duración corregida.

La derivada primera de la función correspondiente a la curva es lo que se conoce como duración modificada. Es lo mismo que decir que es la pendiente de la curva precio/rendimiento en un punto determinado, el cual coincide con el rendimiento real, esto es, el punto de tangencia entre ella y la recta representativa de la duración modificada.

Como se puede observar la convexidad es siempre positiva. Además para una cartera de renta fija, se puede concluir que la incidencia de la convexidad es la siguiente: cuanto mayor sea su convexidad, ante una subida de los tipos de interés, la caída del valor de la cartera será inferior al

²¹ Recordemos que la duración modificada es una estimación de tipo lineal de la relación precio/rendimiento que en la realidad no lo es.

previsto por su duración corregida²². Por el contrario, ante una bajada de los tipos de interés, el valor de mercado de la cartera aumentará por encima de lo previsto según su duración corregida.

Para calcular la convexidad⁽²³⁾ se acude a la derivada segunda de la curva precio/rendimiento. Veamos como varía la duración modificada cuando varían los tipos de interés.

Matemáticamente se puede escribir:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{j=1}^n \frac{j(1+j)F_j}{(1+r)^j}$$

r : representa el tanto interno de rendimiento del título en el momento del cálculo.

Para determinar la variación del precio de un título como consecuencia de un aumento en el tipo de interés, en la práctica se procede de la siguiente forma: la variación producida por la DM⁽²⁴⁾ se le añade la convexidad para la misma variación en el tipo de interés. Tomando como amplitud de la variación de 100 p.b. la expresión queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= -DM * dr + \frac{1}{2} Con(dr)^2 = \\ &= -DM * 0,01 + \frac{1}{2} Con * 0,01^2 \end{aligned}$$

Ejercicio N° 8

Se considera un título de nominal 1.000 € con pago periódico de intereses y para ser amortizado al final de una sola vez. Se reparte un cupón anual del 2% y el horizonte temporal de la operación es de 5 años.

En el momento presente el título cotiza al 98,136%.

cos del tipo de interés del



Respuesta

Si el título cotiza en el mercado al 98,136% entonces la rentabilidad implícita resulta: 5,8%.

$$P = Ci a_{\overline{5}|r} + C (1+r)^{-5}$$

$$981,36 = 20 a_{\overline{5}|r} + 1.000 (1+r)^{-5} \rightarrow r = 0,024$$

Si calculamos la duración de este título, para este tanto de rendimiento, resulta:

Tabla 6

t	F_t	$(1+r)^{-t}$	$F_t (1+r)^{-t}$	$F_t (1+r)^{-t} t$
				(5)

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



1	20	0,977	19,53	19,53
2	20	0,954	19,07	38,15
3	20	0,931	18,63	55,88
4	20	0,909	18,19	73,76

Para averiguar el precio real realizamos los cálculos al nuevo tipo de interés del mercado, esto es, al 2,25%:

Tabla 7

t	F_t	$(1+r)^{-t}$	$F_t (1+r)^{-t}$	$F_t (1+r)^{-t} t$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	20	0,938	18,76	37,52
3	20	0,935	18,71	56,13
4	20	0,915	18,30	73,19
5	1020	0,895	912,61	4.563,03
Precio			988,30	4.750,16

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](#).



Ejercicio N° 9

Un inversor desea analizar una obligación correspondiente a una emisión de títulos de nominal $N=1.000$ €, que abonan un cupón periódico de 25 € pospagable y con un vencimiento emisión a 10 mercado del 2,6%.

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](#).



Se quiere estudiar el comportamiento de su convexidad.

Respuesta

- Construimos una tabla para valores del tanto r: 2%, 2,25%, 2,5%, 2,75%, 3%.

Tabla 8

r (%)	% cambio r	precio teórico	% cambio en precio		convexidad %
			Actual	estimado	
2	-0,5	1.044,91	4,4913	4,34	0,15
2,25	-0,25	1.022,17	2,2166	2,17	0,05
2,5	0	1.000,00	0	0,00	-
2,75	0,25	978,40	-2,1600	-2,17	0,01
3	0,5	957,35	-4,2651	-4,34	0,08

Fuente: elaboración propia

- Se calcula el precio teórico para cada uno de los tantos de rendimiento. Por ejemplo para un tanto del 3% el cuadro sería.

Tabla 9

Esta obra se publica bajo una licencia [Creative Commons License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).  (5)

t	F	$(1+r)^{-t}$	$(1+r)^{-t-1}$	$(1+r)^{-t}$
0				
1	25	0,971	24,27	24,27
2	25	0,943	23,56	47,13
3	25	0,915	22,88	68,64
4	25	0,888	22,21	88,85

- Cálculo de la convexidad

Si restamos los valores de las dos columnas anteriores se obtiene la convexidad en porcentaje.

$$2,217 - 2,17 = 0,05$$

Como se puede observar cuanto mayor es la diferencia entre los tantos de rendimiento mayor es la diferencia entre el precio estimado a través de la duración modificado y el precio teórico del título. Esto es, mayor es la convexidad. Se puede observar que la convexidad es prácticamente despreciable cuando



El cálculo directo del valor de la derivada segunda del precio respecto al tipo de interés resulta:

Existen algunos factores que influyen en la convexidad con cierta claridad. Se pueden considerar como los más importantes, los siguientes:

- La distribución de los flujos de capitales
- La duración
- La volatilidad de los tipos de interés
- La dirección de las variaciones de los tipos de interés.

Es evidente que cuanto mayor es la dispersión de los flujos de capital mayor es la convexidad del título. Luego la relación entre ambas es positiva. Se puede comprobar tomando un título cupón cero y un título con pago periódico de cupones. Tomando la misma duración para ambos títulos, la convexidad de un título con pago periódico de cupones será mayor que la del título cupón cero. La justificación está en que la dispersión de los flujos de capitales es superior en aquél y esto significa que los flujos de capital a largo plazo capturan progresivamente una mayor cantidad de convexidad.

En cuanto a la duración se sabe que, cuando se trata de un título de renta fija, existe una relación directa y positiva entre duración y convexidad. Esto significa que cuanto mayor es la duración del título mayor será su convexidad, pero la relación entre ambos no es lineal²⁵. Se puede comprobar que es una función creciente de la duración.

En cuanto a la convexidad se puede afirmar que aumenta conforme aumenta la volatilidad del mercado de renta fija. Se puede apreciar que la convexidad es mayor cuanto mayor es la variación al alza o a la baja de los tipos de interés del mercado. Por consiguiente, una gran volatilidad de los tipos de interés del mercado origina unos mayores efectos de convexidad⁽²⁶⁾. Se puede comprobar que cuanto más volátil es el mercado, los beneficios para la cartera se amplían si la cartera presenta una gran convexidad.

Por lo que respecta a la dirección de la variación del tipo de interés se puede comprobar que la convexidad resulta superior en el caso de bajadas de tipos de interés que en el caso de una subida equivalente de los mismos. Luego la convexidad está más influenciada por los descensos de los rendimientos. A partir de aquí se concluye que la convexidad no es simétrica respecto a la dirección de las desviaciones de los tipos de interés.

9.2. Convexidad de una cartera de títulos de renta fija

Por extensión de la convexidad de un título podemos definir la convexidad de una cartera de títulos de renta fija, como la variación del precio del conjunto de la cartera no explicada por su duración modificada.

De una forma muy simplificada la convexidad de una cartera de títulos de renta fija se puede obtener como diferencia, a la variación real del precio de la cartera en relación a la variación prevista por la duración modificada.

²⁵ Lo cual conduce a que un título que tenga el doble en valor de la duración que otro título tenga más del doble en convexidad.

²⁶ Aumenta la probabilidad de una mayor variación en el rendimiento del mercado.