

MUGIMENDU LAUAREN GEOMETRIA

Mekanismoen Zinematka

2. Gaia

Itziar Martija López

Maider Loizaga Garmendia

Departamento de Ingeniería Mecánica

Mekanika Ingeniaritza Saila



MUGIMENDU LAUAREN GEOMETRIA

1. [Mekanismo lauen garrantzia](#)
2. [Irudi lau baten mugimenduaren azterketa bere planuan](#)
3. [Abiaduren eremua](#)
4. [Burmester-en teorema](#)
5. [Aronhold-Kennedy-ren teorema](#)
6. [Azelerazioen eremua](#)
7. [Hartman-en teorema](#)
8. [Euler-Savary-ren formula](#)
9. [Eragiketa grafikoak](#)
10. [Bobillierren teorema. Inflexioen zirkunferentzia](#)
11. [Bresseren zirkunferentzia. Azelerazioen poloa](#)



2.1 Mugimendu laua duten mekanismoen garrantzia

✿ DEFINIZIOA

- Mekanismo batek higidura laua duela esaten da, puntu guztien ibilbideak plano finko batekiko paraleloak direnean. Mekanismoa planoan egon dadila ez da beharrezkoa, baina desplazamenduen, abiaduren eta azelerazioen kalkulatorako horrela suposatzen da. Indarren kalkuloetarako ez du balio (mekanismoaren planoan momentuak sortu daitezkeelako).

✿ GARRANTZIA

- Erabiltzen diren mekanismo gehienek mugimendu laua dute.
- Mugimendu lauaren propietate gehienek, mugimendu tridimentsionalean hedapen bat daukate.
- Mekanismo espazial asko kate zinematiko bati biraketa askatasun gradu bat gehituta eratzen dira.

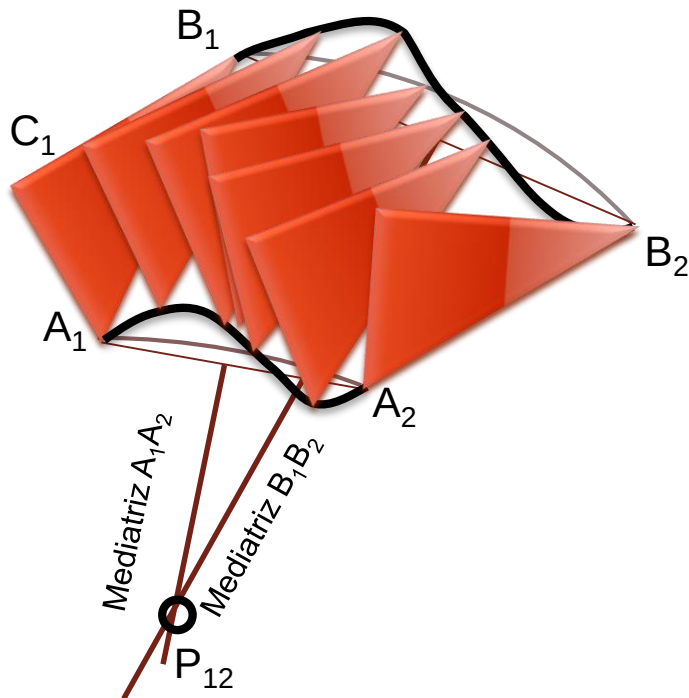
2.2 Irudi lau baten mugimenduaren azterketa bere planoan

- ✿ Mekanismo bat osatzen duten elementuetariko bakoitzaren mugimendua, elementu hori beste elementuekin elkartzeko erabilitako loturek ezarritako galeraazpenek definitzen dute.
- ✿ Mekanismoa baten mugimendua aztertzean, mekanismo horretako elementu guztien mugimenduen azterketa suposatzen du.
- ✿ Elementu baten geometria, elementu horri plano mugikor bat soldatuz irudikatuko da.
- ✿ Biraketa Poloaren kontzeptutik abiatuta, Aldiunezko Biraketa Zentroaren (ABZ) kontzeptua aurkeztuko da.



2.2 Irudi lau baten mugimenduaren azterketa bere planoan

Biraketa Poloa



- AB segmentuari zurrunki lotuta suposatzen den P_{12} , puntuak hasierako eta bukaerako posizio berdina dauka. 1 eta 2 puntuen arteko mugimendua, puntu horren inguruko biraketa kontsidera daiteke.
- 2 posizioa 1 posiziora hurbiltzen denean, A_1A_2 segmentua A puntuko ibilbidearen ukitzailera hurbiltzen da. Plano mugikorreko beste puntuekin berdina gertatzen da.

Aldiuneko Biraketa Zentroa (ABZ)

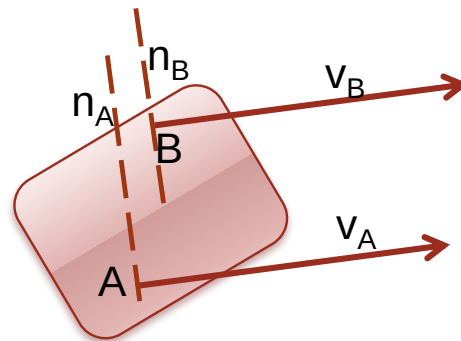
- Mugimendu infinitesimal baten poloari aldiuneko biraketa zentroa (A.B.Z.) deritzo eta solidoaren bi puntuen ibilbidearen ukitzaileen normalak marraztuz lortzen da; hau da bi puntuetako abiadurari normala marraztuz lortzen da.



2.2 Irudi lau baten mugimenduaren azterketa bere planoan

ALDIUNEZKO BIRAKETA ZENTROAREN PROPIETATEAK

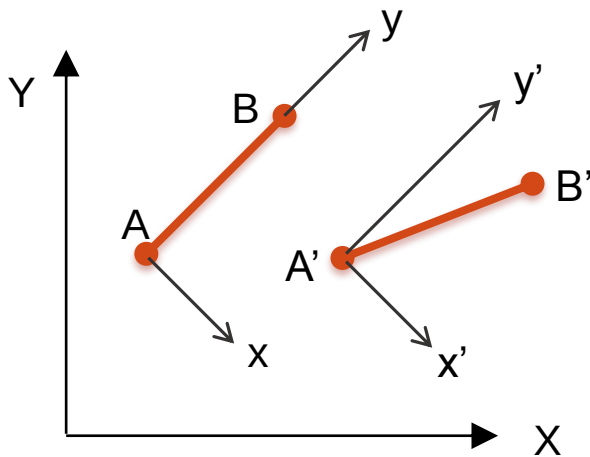
- dt denbora infinitesimal baten ABZ-k bere kokapena aldatzen ez duenez gero, puntu horren abiadura kontsideratzen ari garen unean hutsa da.
- Solidoko beste puntuen abiadurak, ABZ-rekin lotzen dituzten segmentuari elkarzutak dira eta bere magnitudea segmentu horri proportzionala da.
- Solido zurrunaren abiadura angeluarra, puntu baten abiadura eta puntu horrek ABZ-raino duen distantziaren arteko erlazioa da.
- Solido zurrunaren abiadura angeluarra, puntu baten abiadura eta puntu horrek ABZ-raino duen distantziaren arteko erlazioa da.



- Figure 1. The effect of the initial concentration of the monomer on the polymerization of α -methylstyrene initiated by BuLi in THF at -78°C . The concentration of the initiator was 0.001 mol/L . The polymerization was terminated by the addition of methanol.

2.3 Abiaduren eremua

ABIADUREN EREMUA HIGIDURA LAUAN



Izan bitez A eta B, ω abiadura angeluarrarekin mugitzen den, plano mugikor baten edozein bi puntu

- A puntuan, biratu gabe A puntuarekin trasladatzen den S ardatz sistema mugikorra jarriko da. Erreferentzi sistema bere buruarekiko paraleloa mantenduko da

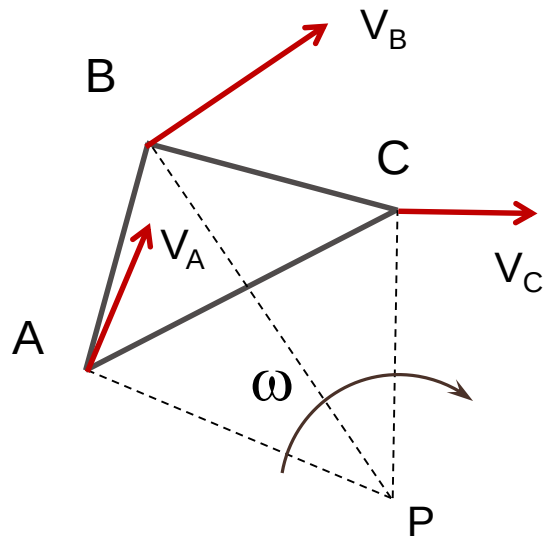
Hurrengoa egiaztatzen da: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$

- Eta hurrengoa idatzi daiteke: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$
- non $|\vec{v}_{BA}| = \omega \cdot AB$
- Eta $(\underline{\Lambda}^{BV})$ –ren norabidea= AB-ri elkarzut izanda

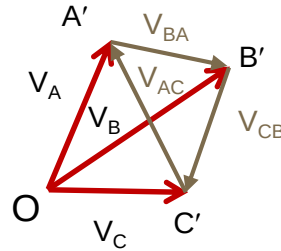


2.3 Abiaduren eremua

ABIADUREN IRUDIA



O puntua: ABZ-ren homologoa (P),
solidoko abiadura hutsa duen
puntu bakarra



A, B eta C puntuen abiadura bektoreak,
amankomuneko O jatorri batera eramanez eta
bektore hauen muturrak lotuz, A'B'C' hirukia
definitzen da:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Proporzionaltasun
erlazioa ω izanik

$$|v_{BA}| = \omega \cdot AB, A'B' \perp AB$$

$$|v_{CB}| = \omega \cdot CB, B'C' \perp BC$$

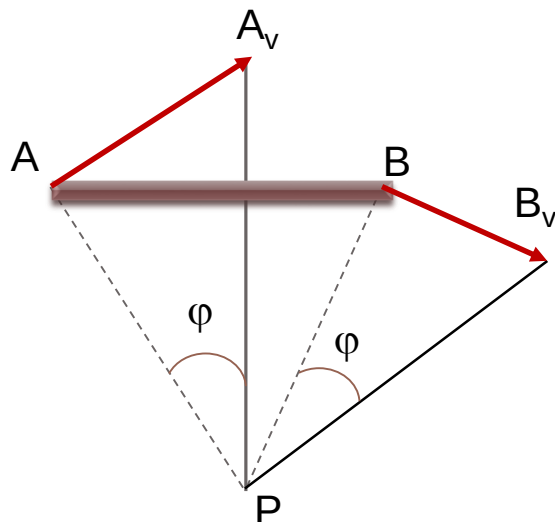
$$|v_{AC}| = \omega \cdot AC, A'C' \perp AC$$

Eragiketa honek, bi puntuen abiadurak jakinik, hirugarren puntu baten abiadura lortzeko balio du.



2.4 Burmesterren teorema

P (ABZ), AB segmentua emanda eta A puntuko abiadura ezaguna eta bere muturra A_v izanda, B puntuko abiadura kalkulatu.



- ABZ-ren propietateak aplikatuz:

$$\overline{AA_v} = \omega \overline{AP} \longrightarrow \begin{cases} \overline{BB_v} = \omega \overline{BP} \\ \omega = \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

- B_v topatzeko

$$\triangle PAA_v \cong \triangle PBB_v$$

Triangelu zuzenak dira
Bi alde proportzional dituzte

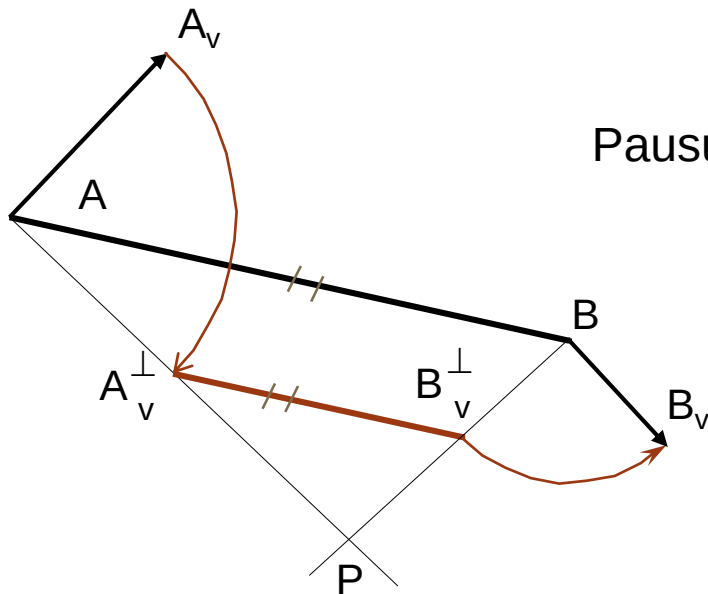
- P puntutik PB zuzenarekin φ gradutako angelua osatzen duen zuzena marraztuz, B_v lortuko da.



2.4 Burmesterren teorema

Abiadura elkartzuten eragiketa:

A, B, P eta v_A ezagunak izanda



- Pausuak
- AP –ren norabidean v_A abatitu $\rightarrow A_v^\perp$
 - $A_v^\perp$ puntutik AB-ren paraleloa egin $\rightarrow B_v^\perp$
 - Desabatituz: $B_v^\perp \rightarrow B_v$

Hurrengoa frogatu daiteke:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AA_v^\perp}}{\overline{BB_v^\perp}} \longrightarrow \frac{\overline{AA_v^\perp}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BB_v^\perp}}{\overline{PB}} = \omega$$



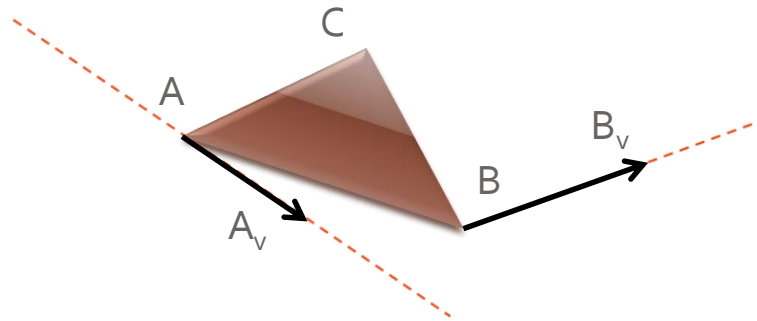
2.4 Burmesterren teorema

Eragiketa horretatik abiatuz, plano mugikorreko bi puntuetako abiadurak ezagutuz, eta ABZ marrazkitik kanpo geratzen bada, planoko hirugarren puntu batetako abiadura kalkulatu daiteke.

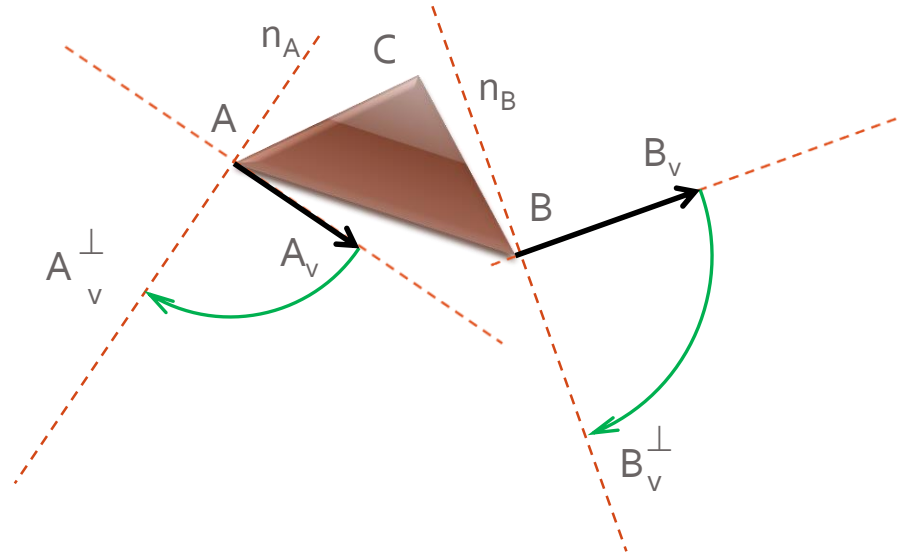
1. A eta B puntuetatik, haien abiaduren elkarzutak marrazten dira, $A_v^\perp$ eta $B_v^\perp$ lortuz (ABren paraleloa eta antzeko irudia marraztu)
 2. $A_v^\perp$ -tik  $\parallel AC$
 3. $B_v^\perp$ -tik  $\parallel BC$
-  $C_v^\perp$
4. C puntuarekin elkartuz eta C-ren elkarzutaren gainean desabatituz, C_v lortzen da eta beraz C puntuko abiadura (modulua, norabidea eta noranzkoa).



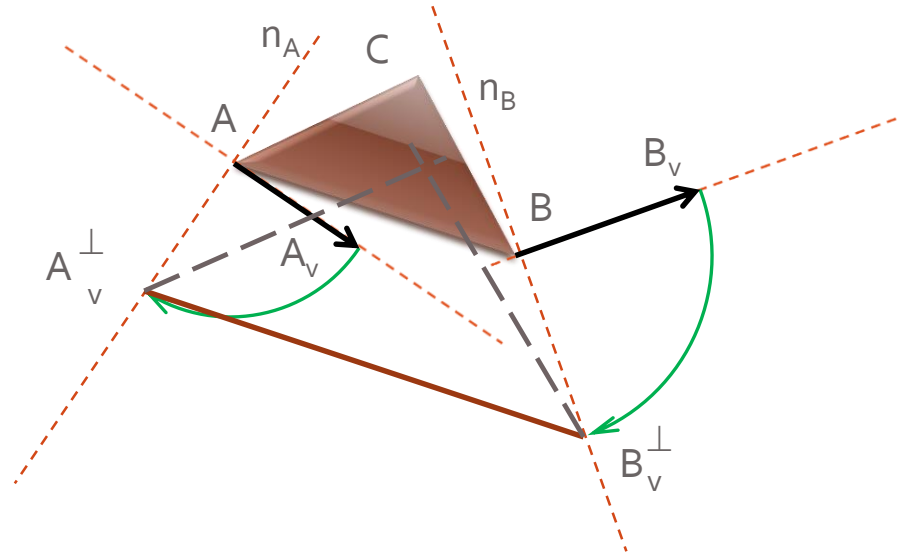
2.4 Burmesterren teorema



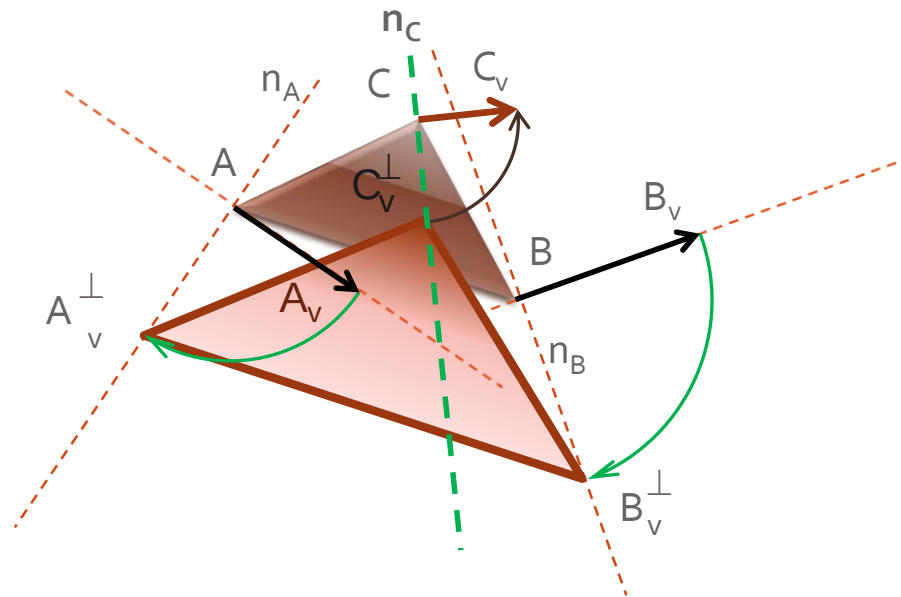
2.4 Burmesterren teorema



2.4 Burmesterren teorema



2.4 Burmesterren teorema



2.4 Burmesterren teorema

BURMESTERREN TEOREMA

Elementu zurrun baten abiadura bektoreen muturrak osatzen duten irudia, jatorrizko irudiaren antzekoa da. Antzekotasun erlazioa $\sqrt{1+\omega^2}$ da eta jatorrizko angeluarekiko φ angelu bat biratuta dago

Hurrengoa betetzen da: $\frac{\overline{AA_v^\perp}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BB_v^\perp}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CC_v^\perp}}{\overline{PC}}$

$$\overline{AA_v^\perp} = \overline{AA_v} \Rightarrow \frac{\overline{AA_v}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BB_v}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{CC_v}}{\overline{PC}} = \omega$$

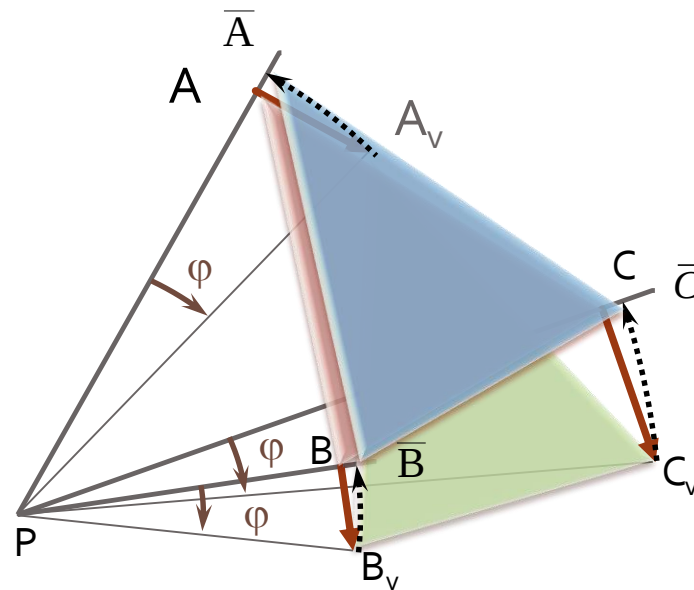
$APA_v \cong BPB_v \cong CPC_v$ denez: $\frac{\overline{PA_v}}{\overline{PA}} = \frac{\sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AA_v}^2}}{\overline{PA}} = \frac{\sqrt{\overline{PA}^2 + (\omega \overline{PA})^2}}{\overline{PA}} = \sqrt{1+\omega^2}$

$$\frac{\overline{PA_v}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB_v}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC_v}}{\overline{PC}} = \sqrt{1+\omega^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ABC} \propto \widehat{A_v B_v C_v} \\ \widehat{ABC} \propto \widehat{A_v B_v C_v} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \propto \widehat{A_v B_v C_v}$$



2.4 Burmesterren teorema



2.4 Burmesterren teorema

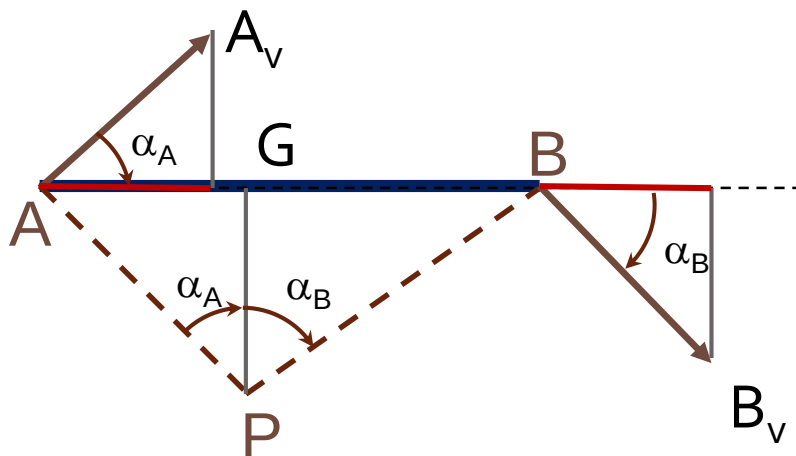
BURMESTERREN TEOREMAREN LEHENENGO ONDORIOA

Solidoaren A,B eta C puntuak lerrotuta badaude, beraien abiaduren muturrak ere lerrotuak egongo dira.

BURMESTERREN TEOREMAREN BIGARREN ONDORIOA

Datuak: P poloa eta A eta B puntuetako abiadurak.

- P tik ABren elkartzuta marraztuz G lortzen da
- A eta B puntuetako abiadurak AB zuzenaren gainean proiektatuz:



$$\overline{AA_v} \cos(\overline{AA_v}, \overline{AB}) = \omega \overline{PA} \cos(\overline{PA}, \overline{PG}) = \omega \overline{PG}$$

$$\overline{BB_v} \cos(\overline{BB_v}, \overline{AB}) = \omega \overline{PB} \cos(\overline{PB}, \overline{PG}) = \omega \overline{PG}$$

Planu mugikorrek zuzen baten gainean solidoko puntu guztiek zuzen horren arabera osagai berdina dute.

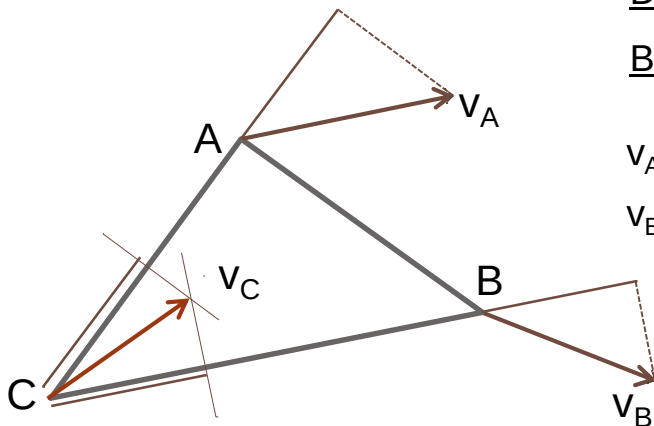
Solido zurrunekeo puntuen arteko distantzia konstantea mantendu behar denez, beraz bi puntuen arteko abiadura erlatiboaren osagai bakarra bi puntuak lotzen duen segmentuari elkartzuta izan behar du.



2.4 Burmesterren teorema

BIGARREN ONDORIOTIK, LOR DAITEKEEN ERAGIKETA GRAFIKOA:

A eta B puntuetako abiadurak ezagunak badira, C puntuko abiadura lortu ABZ erabili gabe:



Datuak: A, B eta C puntuak eta A eta B puntuetako abiadurak

Bilatzen dena: C puntuko abiadura

v_A AC zuzenaren gain proiektatuz, v_C -ren osagai bat lortzen da
 v_B BC zuzenaren gain proiektatuz, v_C -ren beste osagaia lortzen da



Bi osagaiak desproiektatuz, v_C lortuko da

OHARRA: v_C -ren abiadura lortzeko, osagaiak ez dira **batu** behar, **desproiektatu** behar dira.

2.5 Aronhold-Kennedy-ren teorema

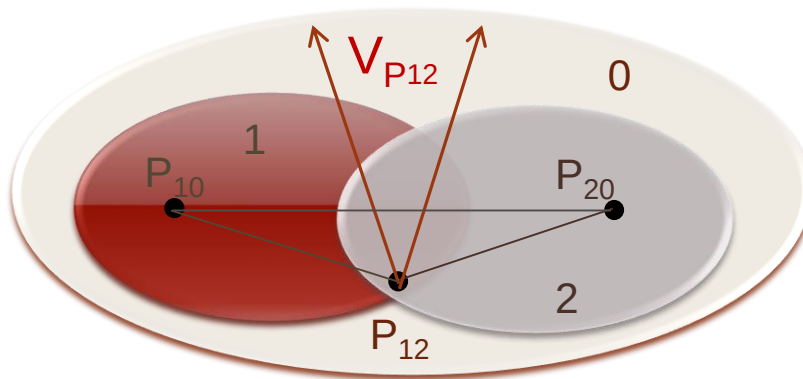
Bi plano mugikorren arteko mugimenduari *Aldiunezko Biraketa Zentroaren* kontzeptuaren orokorpena

- Bi planoen arteko mugimendu erlatiboaren ABZ, bi planoetako izanda abiadura berdina duen puntua da edo bi planoen arteko abiadura erlatibo nulua duen puntua da
- **Aronhold-Kennedyren teoremak** adierazten duenaren arabera P_{12} poloa beste bi poloekin lerrotuta egongo da hau da, $P_{10}P_{20}$ zuzenaren gainean geratzen da.



2.5 Aronhold-Kennedy-ren teorema

- Mugimendu erlatiboa duten hiru plano har dizagun. Hiruretariko bat finkoa izango da. Plano finkoa 0 izendatuko da eta plano mugikorak 1^{go} eta 2. planoak izango dira. Izan bitez, $P_{01}=P_{10}$ eta $P_{02}=P_{20}$ plano mugikorren, plano finkoarekiko mugimenduaren poloak.
- P12 zuzen horren gain egongo ez balitz, bere abiadura alde batetatik P10P12 –ri $\perp$ izango litzateke eta beste alde batetatik P20P12-ri $\perp$, eta bi norabideak ez ziren bat etorriko. Definizioz, P12 puntuak abiadura berdina izan behar du, bi planuetakoa izanda. Hori gertatu dadin, P12 puntua, P10P20 puntuek osatzen duten lerroaren gain egon behar du.



Abiaduraren modulua zuzena izan dadin hurrengoa bete behar da:

$$\omega_{10} \overline{P_{10}P_{12}} = \omega_{20} \overline{P_{20}P_{12}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{P_{10}P_{12}}}{\overline{P_{20}P_{12}}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



2.5 Aronhold-Kennedy-ren teorema

ZIRKULUAREN DIAGRAMA

Prozedura honen bidez, mekanismo baten abiaduren polo guztiak lortu daitezke.

Zirkunferentzia, mekanismoak duen elementuak bezainbeste zatitan zatituko da.

Planoen arteko mugimenduaren geometria gainbegiratzuz, errez ezagutu daitezkeen poloei, **polo primarioak** deritzen zaie. Hurrengoak polo primarioak dira:

- Mekanismoko errotazio loturak.
- Infinituan dagoen edozein puntu, lotura prismatiko baten translazioarekiko elkarzuta den norabidean.
- Errodadura duen kontaktu puntua.
- Espeka motako lotura batetan, poloa, kontaktu puntuan eginiko normalean dago kontaktua.



2.5 Aronhold-Kennedy-ren teorema

ZIRKULUAREN DIAGRAMA

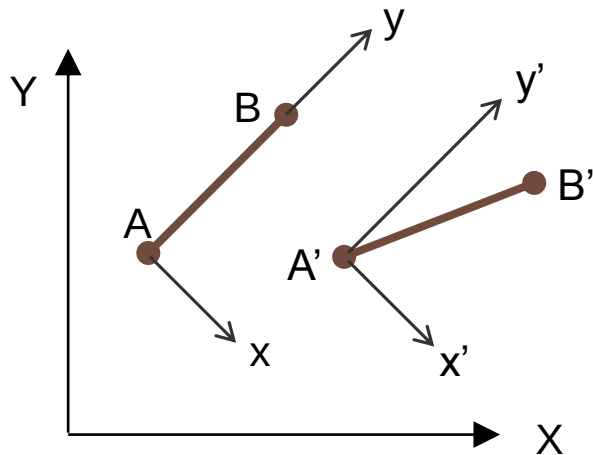
Zirkuluaren diagrama burutzeko hurrengo pausuak jarraitu behar dira:

- Zirkunferentziaren zatiak 1etik n-ra izendatzen dira. Puntuak lotzen dituzten korda posible guztiak mekanismoaren poloak ordezkatzeko dute.
- Polo primarioei dagozkien kordak marrazten dira eta ezezagunak diren poloei dagozkien kordak zuzen ez jarraiak erabiliz markatzen dira.
- Ezezagunak diren poloak topatzeko, amankomunean alde ez-jarrai bat duten bi triangelu bilatzen dira bi triangeluetako beste alde guztiak jarriak izan behar direlarik. Poloak binaka elkartuz, marrazten diren bi zuzenak mozten diren puntuan alde ez-jarraiari dagokion poloa topatu daiteke. Behin eta berriz errepikatuz, polo guztiak bilatzen dira.



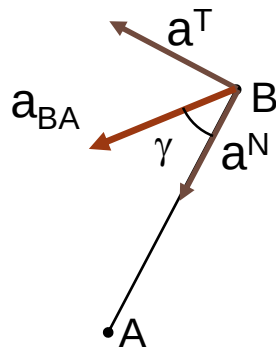
2.6 Azelerazioen eremua

- Izan bitez A eta B higidura laua duen solido zurrunko bi puntu eta A puntuan trasladatzen den erreferentzi sistema bat.



- Arrastre azelerazioa A puntukoa izango da, erreferentzi sistema errotatzen ez duenez, Coriolis azelerazioa nulua izango da eta azelerazio erlatiboa B puntuak A puntuaren inguruan biratzean definitzen du.

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \\ \vec{a}_{BA} &= \vec{a}_{BA}^N + \vec{a}_{BA}^T\end{aligned}$$



- Errotazioan azelerazioak erradio bektorearekin (puntuaren mugimenduaren normalarekin) osatzen duen γ angelua konstantea da eta bere balioa:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a^T}{a^N} = \frac{\alpha \cdot \overline{AB}}{\omega^2 \cdot \overline{AB}} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$



2.6 Azelerazioen eremua

✱ Solidoko hiru puntuentzat, hurrengoa idatzi daiteke:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{a_{BA} AB} \\ \widehat{a_{CB} BC} \\ \widehat{a_{AC} CA} \end{array} \right\}$$

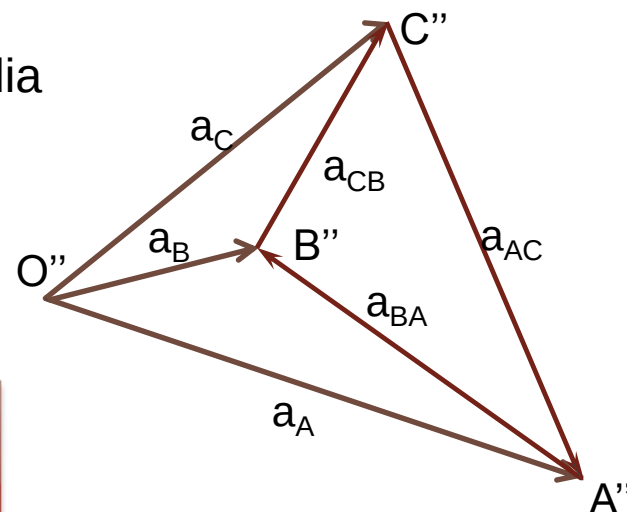
γ angelua kte.



azelerazioen irudia

$$\widehat{A''B''C''} \approx \widehat{ABC}$$

Alde homologoek angelu konstantea osatzen dutenez



O puntua: AZELERAZIOEN POLOA edo azelerazio nulua duen plano mugikorreko puntua (hasierako irudian O puntuaren homologoa).



2.6 Azelerazioen eremua

ABZ-REKIN BATERA DATORREN PLANU MUGIKORREKO PUNTUKO AZELERAZIOA

Edozein aldiunetan hurrengoa beteko da:

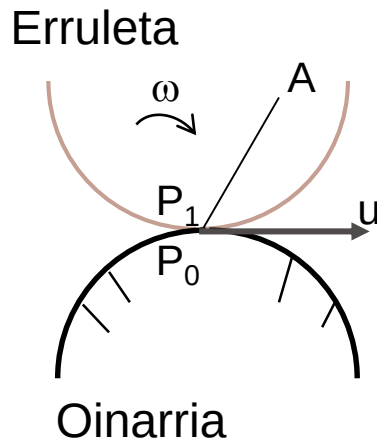
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overline{PA}$$

A puntuko azelerazioa hurrengoa da:

$$\vec{a}_A = \frac{d \vec{v}_A}{dt} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \overline{PA} + \vec{\omega} \times \frac{d \overline{PA}}{dt} \quad \text{non:} \quad \frac{d \overline{PA}}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_P$$

A, erruletako P_1 bada:

$$\vec{a}_{P_1} = \frac{d \vec{\omega}}{dt} \times \vec{0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{0} - \vec{v}_P) = -\vec{\omega} \times \vec{v}_P$$

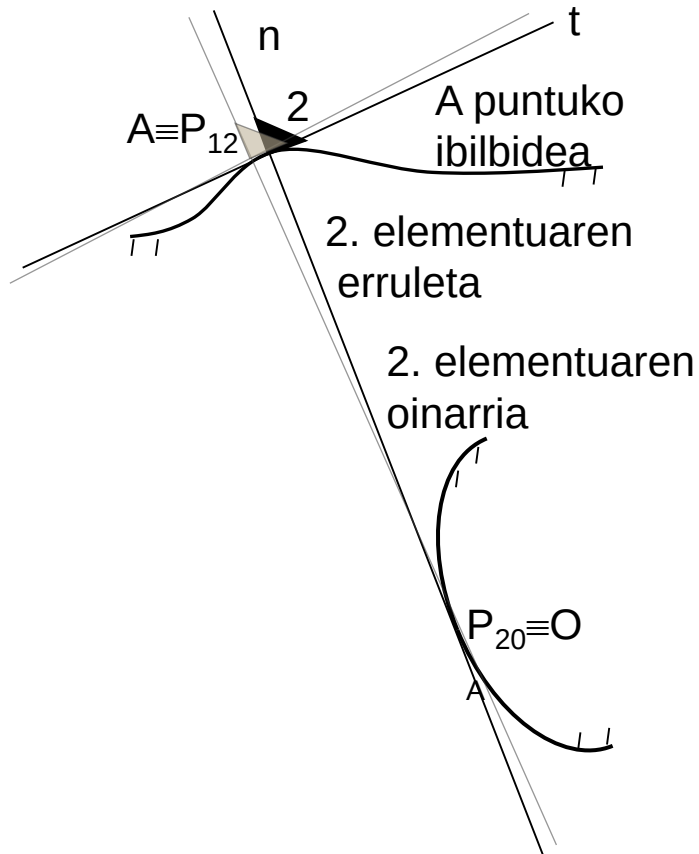


Jarraipen abiadurari u deritzo:

$$a_{P_1} = -\omega u \begin{cases} \text{norabidea: } \perp u \\ \text{noranzkoa: oinarria eta erruleta} \\ \text{banatzeko joera daukana} \end{cases}$$

2.7 Hartmannen teorema

Aurreko kontzeptuak



Izan bitez 0 plano finko bat eta plano mugikor bat 1 eta A ibilbide jakin bat duen plano mugikorreko puntu bat.

Izan bitez n A puntuko ibilbidearen normala eta t ukitzailea. n eta t , A puntuarekin batera mugitzen dira eta mugimenduan dagoen beste plano bat definitzen dute, 2 plano.

P_{10} poloa A puntuko ibilbidearen normalean egongo da (1 planokoa beste puntu bat behar dugu bere posizioa finkatzeko)

P_{12} poloa A puntuarekin batera dator bere abiadura 1 edo 2 elementuetakoa izanda berdina baita.



2.7 Hartmannen teorema

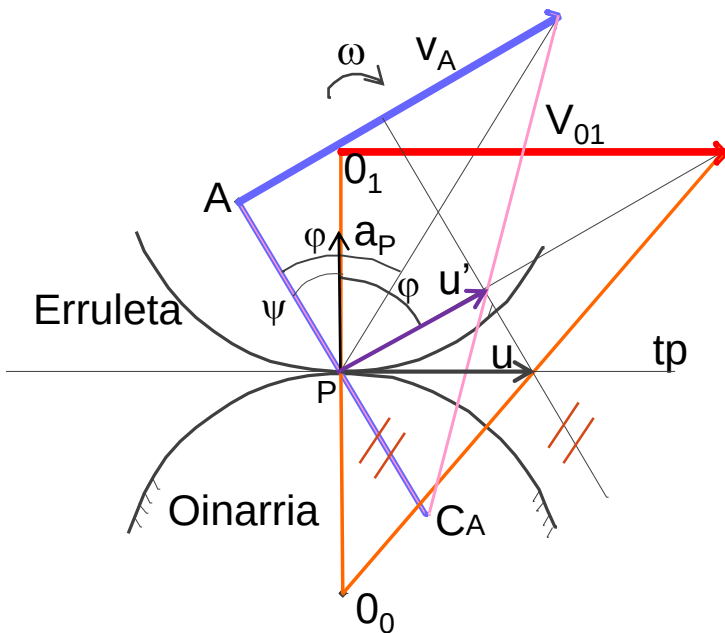
Aurreko kontzeptuak

- ✿ P_{10} eta P_{12} n zuzenean badaude, Aronhold-Kennedy-ren teoremari esker P_{20} puntua baita ere n zuzenean egongo da. 2 planoak ABZ normalean dago, beraz n 2 planoaren erruleta da eta P_{20} infinituki oso gertu dauden bi normalen mozketan lortuko da.
- ✿ t zuzena A puntuarekin mugitzen bada, ibilbideari ukitzailea da eta elkarren artean oso gertu dauden (t) posiziotik (t+dt) posiziora pasatzeko A puntuko ibilbidearen kurbatura zentroaren inguruan (OA) biraketa burutu behar da. Beraz, $P_{20} \equiv OA$.
- ✿ Beraz, 2 oinarria A puntuko ibilbidearen kurbatura zentroen leku geometrikoa da, edo beste era batetara esanda, 2-ren oinarria A puntuko ibilbidearen bilkaria da, hau da A puntuko ibilbidearen normalen inguratzailea.
- ✿ Laburtuz, puntu baten ibilbidearen kurbatura zentroa, A puntuarekin batera mugitzen den, ibilbidearen normalari dagokion planoaren poloa da.



2.7 Hartmann-en teorema

- ✿ “Puntu baten abiaduraren bektorearen muturra, bere ibilbidearen kurbatura zentroa, eta puntuaren abiaduraren araberako polo aldaketako abiaduraren osagaia, hau da, puntuaren abiadurarekiko u -ren osagai paraleloa lerrotuta daude”.
- ✿ Teorema honen bidez, puntu baten abiadura, ABZ eta polo aldaketako abiadura ezagututa, puntu baten ibilbidearen kurbatura zentroa kalkulatu daiteke.



Oinarria, erruleta eta A puntuko abiadura, v_A , ezagunak badira, v_{01} lortu daiteke eta ondoren jarraipen abiadura, P eta O_1 abiadura angeluar berdinarekin O_0 -ren inguruan biratzen baitute.

OHARRA:

P puntua O_1 puntuko abiaduraren muturrarekin lotzen duen zuzena ez du zertan A abiadurari paraleloa izan behar, nahiz eta irudian hala gertatu.



2.7 Hartmann-en teorema

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{AP}^N + \vec{a}_{AP}^T$$

Ekuazio hau AP zuzenaren gainean proiektatuz: $a_A^{II PA} = -J_P \cos \psi + \omega^2 \overline{PA}$

$$\overline{PA} \perp \vec{v}_A \text{ denez} \rightarrow a_A^{II PA} = a_A^N = \frac{v_A^2}{\rho} \rightarrow \frac{v_A^2}{\rho} = -J_P \cos \psi + \omega^2 \overline{PA}$$

$$v_A = \omega \overline{PA} \text{ denez eta } J_P = \omega u \rightarrow \frac{\omega^2 \overline{PA}^2}{\rho} = -\omega u \cos \psi + \omega^2 \overline{PA} \quad (1)$$

$$u \cos \psi \text{ gaia } u' \text{ izendatuz eta irudia aztertuz: } \frac{u'}{v_A} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \Rightarrow u' = \omega \overline{PA} \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \quad (2)$$

(1) adierazpenean (2). ordezkatzuz eta eragiketak eginez:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega \overline{PA}^2}{\rho} &= -\omega \overline{PA} \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} + \omega \overline{PA} \\ \frac{\overline{PA}}{\rho} &= -\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} + 1 \\ \frac{\overline{PA}}{\rho} &= \frac{\overline{CA}}{\overline{CA}} - \frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CA} - \overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CA}} \end{aligned} \right\} \boxed{\rho = \overline{CA}}$$

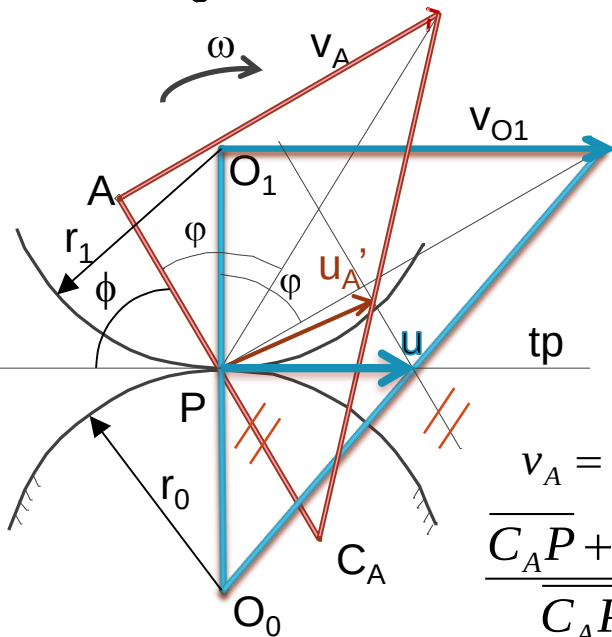
“ v_A -ren muturra v_A -ri paraleloa den u -ren osagairekin elkartuz, eta zuzen hori normala moztu arte luzatuz, A puntuko ibilbidearen kurbatura zentroa topatuko da.



2.8 Euler-Savary-ren formula: inflexioen zirkunferentzia

Euler-Savaryren formula Hartmannen teoremaren adierazpen analitikoa da.

Triangeluen antzekotasuna planteatuz:



$$\left. \begin{aligned} v_{O1} &= \omega r_1 \\ \frac{u}{r_0} &= \frac{v_{O1}}{r_0 + r_1} \end{aligned} \right\} u = \omega \frac{r_1 r_0}{r_0 + r_1} \rightarrow \frac{\omega}{u} = \frac{r_0 + r_1}{r_0 r_1} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$$

Erlazioa konstantea da, ez dago ikasitako puntuaren menpe.

A puntua kontsideratuz eta antzekotasuna planteatuz:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \omega \overline{PA} & u' &= u \sin \phi \\ \frac{\overline{C_A P} + \overline{PA}}{\overline{C_A P}} &= \frac{v_A}{u'} & &= \frac{\omega \overline{PA}}{u \sin \phi} \end{aligned} \right\} \frac{\omega}{u} = \frac{\overline{C_A P} + \overline{PA}}{\overline{C_A P} \overline{PA}} \sin \phi = \left(\frac{1}{\overline{C_A P}} + \frac{1}{\overline{PA}} \right) \sin \phi$$

Adierazpen hau O_1 puntuarentzat lortu denarekin konparatuz:

$$\left(\frac{1}{\overline{CP}} + \frac{1}{\overline{PA}} \right) \sin \phi = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$$

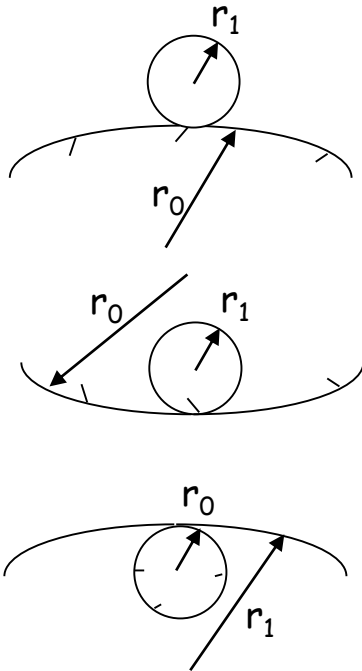
EULER-SAVARY-ren formula



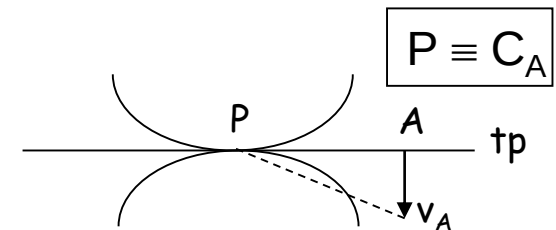
2.8 Euler-Savary-ren formula: inflexioen zirkunferentzia

KEINUAK

- ✱ 1-ren kanpoaldea 0-ren kanpotik errodatzen badu
 r_1 eta r_0 POSITIBOAK dira
- ✱ 1-ren kanpoaldea 0-ren barrukaldetik errodatzen badu
 r_0 NEGATIBOA eta r_1 POSITIBOA dira
- ✱ 1-ren barrukaldea 0-ren kanpoaldetik errodatzen badu
 r_0 POSITIBOA eta r_1 NEGATIBOA dira



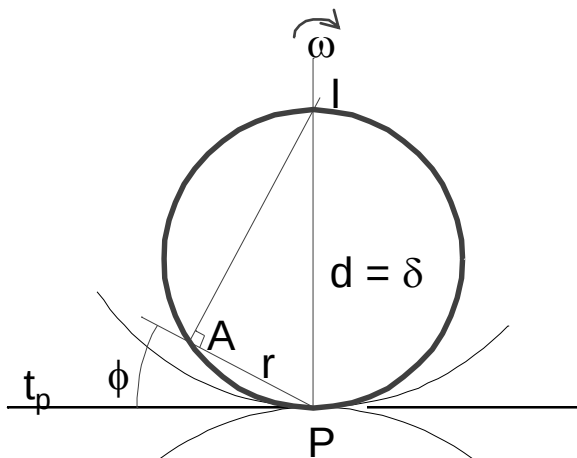
Euler-Savary-ren formula ukitzaile polarreko puntuei aplikatuz, ukitzaile polarreko puntuek kurbatura zentroa poloan dutela ondorioztatzen da.



2.8 Euler-Savary-ren formula: inflexioen zirkunferentzia

INFLEXIOEN ZIRKUNFERENTZIA

- “Azelerazio normalik ez duten plano mugikorrek puntu geometrikoa da. Puntu hauek kurbatura zentroa infinituan daukate.”
- Euler-savary-ren formularen $CP = \infty$ eginez eta $\overline{PA} = r$ izendatuz:



$$\frac{1}{r} \sin \phi = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{\delta}$$

$$\Rightarrow r = \delta \sin \phi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Zirkunferentzia, bat } \delta = \frac{u}{\omega} \\ \text{Ukitzaile polarrari ukitzailea} \end{array} \right.$$

Zirkunferentzia honetako puntuek bakarrik a_t daukate
 $\rightarrow$ puntu guztietako $\mathbf{v}$ eta $\mathbf{a}$ INFLEXIOEN POLOTIK
 pasatzen dute (I). Puntu horretako abiadura:

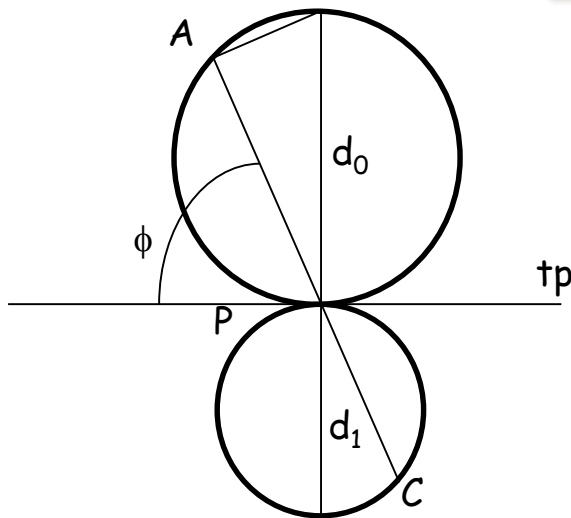
$$v_I = \omega \cdot \delta = u \quad (\delta = u/\omega)$$



2.8 Euler-Savary-ren formula

$$\left(\frac{1}{\overline{CP}} + \frac{1}{\overline{PA}} \right) \sin \phi = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{\delta}$$

- ▣ Euler-Savary-ren formularen bidez, C eta A puntuak erlazionatuak daudela ikusten da, KONJOKATUAK deritzaie.
- ▣ C eta A puntuak, elkarren arteko mugimendu erlatiboaren azterketan, bere konjokatuaren ibilbidearen kurbatura zentroak dira.



POLODIEI UKITZAILEA DEN ZIRKUNFERENTZI BATETAKO PUNTU KONJOKATUAK

- ✱ Zirkunferentziren ekuazioa $\Rightarrow \overline{PA} = d_0 \sin \phi = \frac{1}{\delta}$
- ✱ Euler-Savary-ren adierazpenean ordezkatuz:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\overline{CP}} + \frac{1}{d_0 \sin \phi} \right) \sin \phi &= \frac{1}{\delta} \\ \frac{1}{\overline{CP}} \sin \phi &= \frac{1}{\delta} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{d_1} \end{aligned} \right\} \overline{CP} = d_1 \sin \phi$$

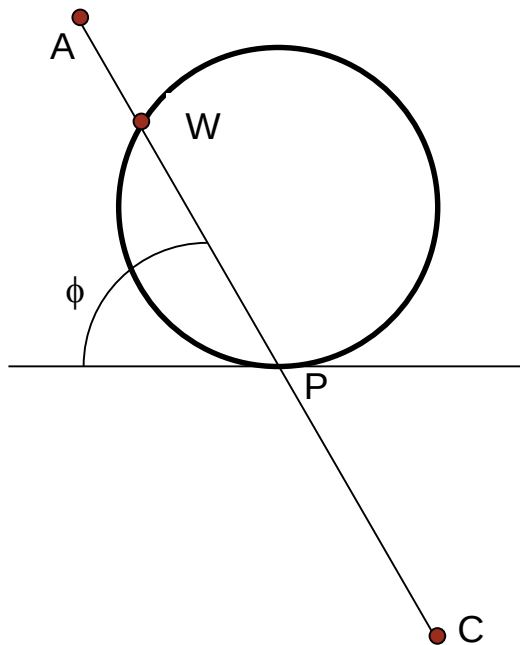
Beraz, puntu konjokatuek polodiei ukitzailea den zirkunferentzia bat definitzen dute, diametroen arteko erlazioa hau izanik:



$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{\delta}$$



2.8 Euler-Savary-ren formula



EULER-SAVARY-REN ADIERAZPEN GRAFIKOA

- Euler-Savary-ren formula A eta w puntuei aplikatuz::

$$\left(\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{CP}} \right) \sin \phi = \left(\frac{1}{\overline{PW}} + \frac{1}{\infty} \right) \sin \phi$$

$$\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{CP}} = \frac{1}{\overline{PW}}$$

- Hurrengoa kontutan izanda:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{CP} = \overline{CA} - \overline{PA} \\ \overline{PW} = \overline{PA} - \overline{WA} \end{array} \right\} \quad \frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{CA} - \overline{PA}} = \frac{1}{\overline{PA} - \overline{WA}}$$

- Eragiketak eginez:

$$\left. \begin{array}{l} (\overline{CA} - \overline{PA})(\overline{PA} - \overline{WA}) + \overline{PA}(\overline{PA} - \overline{WA}) = \overline{PA}(\overline{CA} - \overline{PA}) \\ \overline{CA} \overline{PA} - \overline{CA} \overline{WA} - \overline{PA}^2 + \overline{PA} \overline{WA} + \overline{PA}^2 - \overline{PA} \overline{WA} = \overline{PA} \overline{CA} - \overline{PA}^2 \end{array} \right\} \quad \boxed{\overline{PA}^2 = \overline{CA} \overline{WA}}$$

- $\overline{PA}^2$ beti positiboa denez, C eta W puntuek, A puntuaren alde berdinean egon behar dute.



2.9 Eragiketa grafikoak

- ✱ Inflexioen zirkunferentzia ezaguna izanda, puntu baten ibilbidearen kurbatura zentroa kalkulatu (edo alderantzizkoa).

- ✱ Datuak: P, A eta inflexioen zirkunferentzia

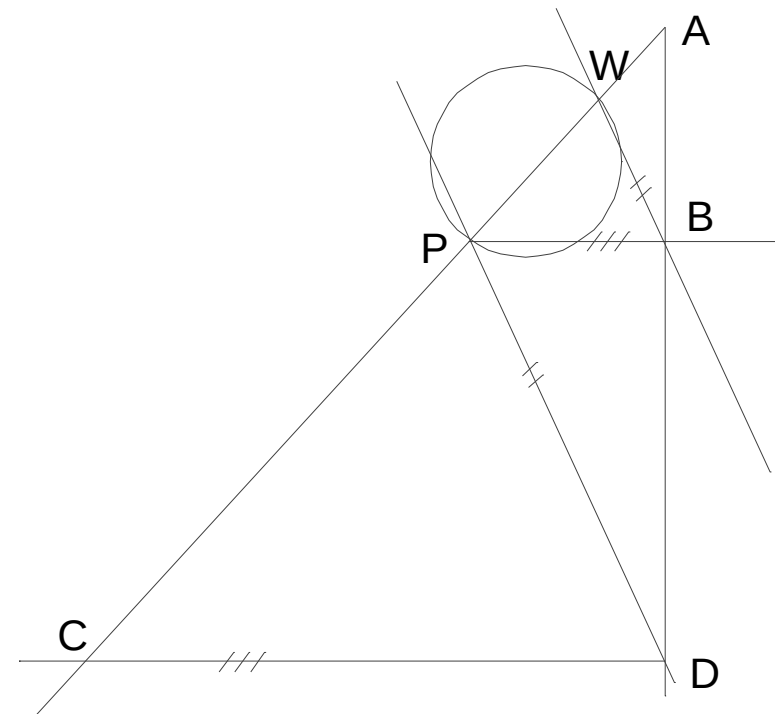
- A eta P puntuetatik edozein bi zuzen $\rightarrow B$
- W eta B elkartu. P-tik paralela bat AB moztu arte $\rightarrow D$
- D-tik AP normala mozten duen PB-ri paraleloa $\rightarrow C$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\overline{PA}}{\overline{WA}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} \\ \frac{\overline{CA}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} \end{array} \right\} \frac{\overline{PA}}{\overline{WA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{PA}} \Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{CA} \overline{WA}$$

- ✱ Datuak: P, A, C

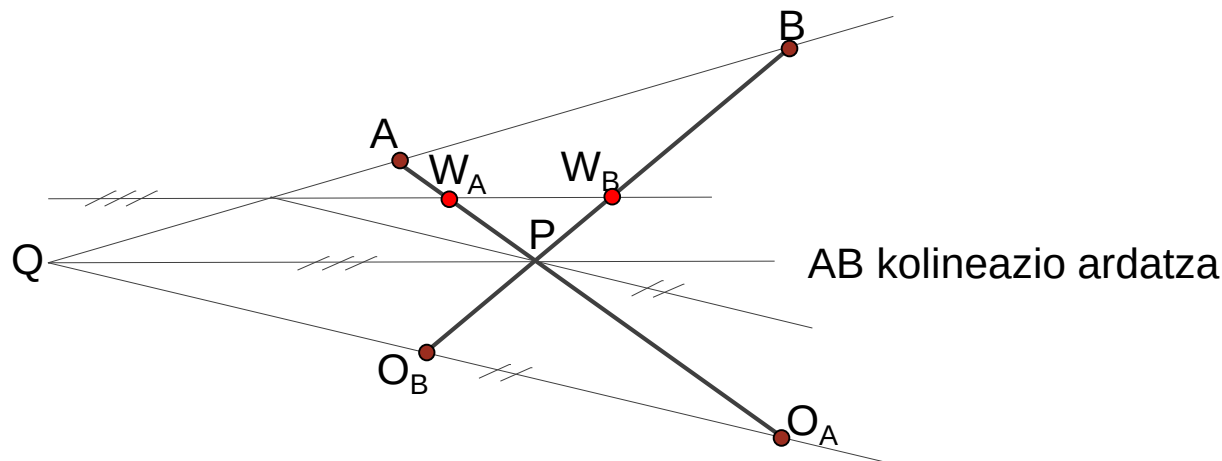
- CD eta AD edozein bi zuzen $\rightarrow D$
- P-tik AD mozten duen CD-ri paraleloa $\rightarrow B$
- B-tik AC mozten duen PD-ri paraleloa $\rightarrow W$

- ✱ Zirkunferentziazkoa den puntu bat lortzen da, ez zirkunferentzia.



2.9 Eragiketa grafikoak

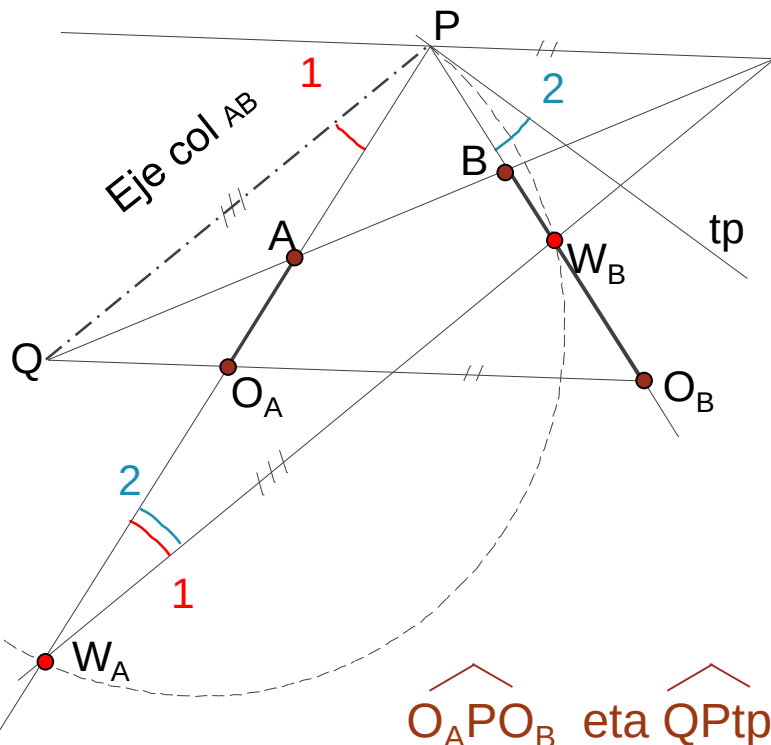
- Bi puntu eta bakoitzaren kurbatura zentroa emanda inflexioen zirkunferentziako 3 puntu lortu.



- $O_A A$ eta $O_B B$ zuzenak mozten diren puntua $\rightarrow P$
- AB eta $O_A O_B$ zuzenak mozten diren puntua $\rightarrow Q$
- QP zuzena $\rightarrow AB$ kolineazio ardatza
- P -tik $O_A Q$ -ri paraleloa $\rightarrow AQ$
- Mozketa puntutik AQ zuzenari paraleloa $\rightarrow O_A A$ eta $O_B B$ zuzenak mozten direnean $\rightarrow W_A$ eta W_B puntuak lortzen dira

2.10 Bobillierren teorema

- “Bi punturen ibilbideen zuzen normalek osatzen duten angeluaren erdikaria, ukitzaile polarrak eta aurreko bi puntuen arteko kolineazio ardatzak osatzen duten angeluaren erdikariarekin bat dator”.



- Inflexioen zirkunferentzia eta ukitzaile polarra ezagunak izanda.
- Hurrengo angeluak berdinak dira:

$$(1) \quad \widehat{P W_A W_B} = \widehat{Q P W_A}$$

$$(2) \quad \widehat{tp P O_B} = \widehat{Q P W_A}$$

- Eta beraz $\widehat{tp P O_B} = \widehat{P W_A W_B}$

$\widehat{O_A P O_B}$ eta $\widehat{Q P tp}$ angeluetako erdikaria berdina da



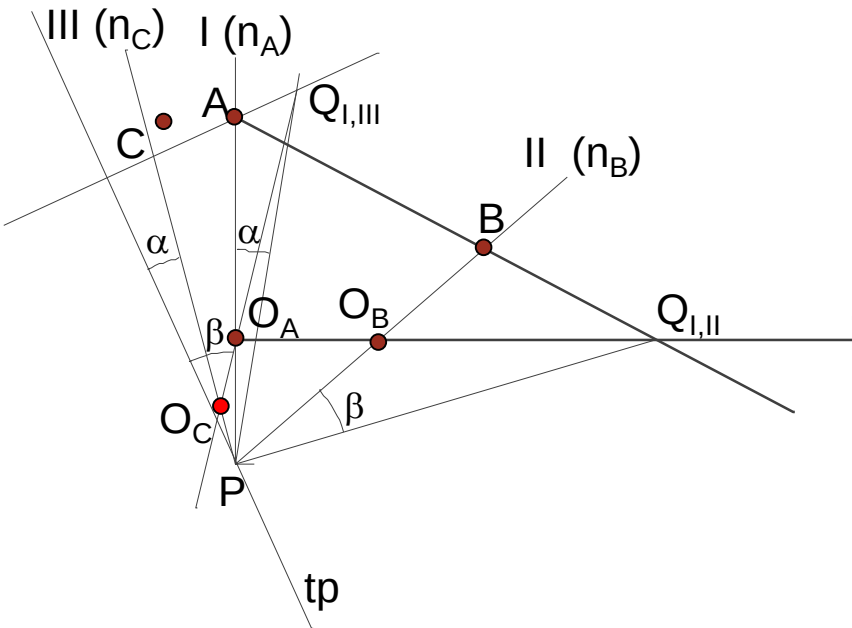
2.10 Bobillierren teorema

ARONHOLD-EN ERAIKUNTZA

Puntu konjokatuen bi bikote emanda, A, O_A eta B, O_B, plano mugikor berdineko hirugarren puntu baten konjokaturik topatzeko balio du.

Pausuak:

1. I, II mozketak $\Rightarrow$ P (CIR)
2. $\overline{AB}, \overline{O_A O_B} \Rightarrow Q_{I,II}$
3. $\overline{P Q_{I,II}} \equiv$ I, II kolineazio ardatza
4. β (kol. ard. I, II) = Ang. (I, tp) $\Rightarrow$ tp
5. α (tp, III) = Ang. (I, kol. ard. I, III) $\Rightarrow$ kol. ard. I, III.
6. $\overline{CA}$, kolineazio ardatza I, III $\Rightarrow Q_{I,III}$
7. $\overline{Q_{I,III} O_A}$, III $\Rightarrow$ O_C bilatutako puntua



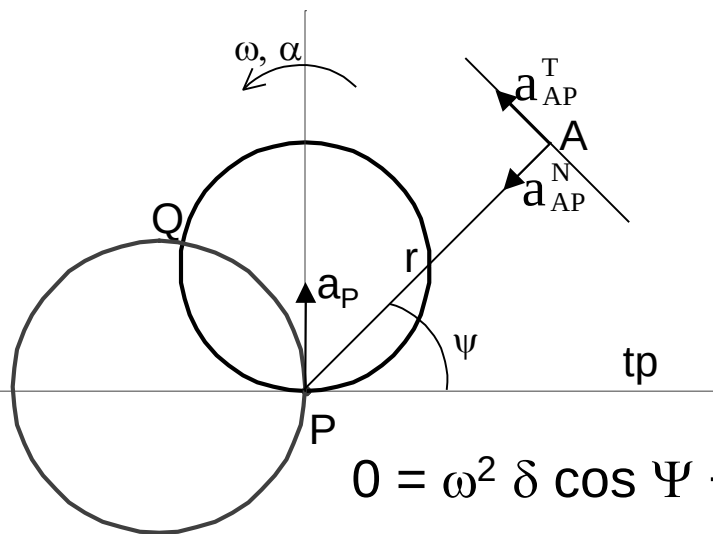
2.11 Bresseren zirkunferentzia. Azelerazioen poloa

✿ INFLEXIOEN ZIRKUNFERENTZIA

- Azelerazio normal nulua duten plano mugikorreko puntuen leku geometrikoa.

✿ BRESSEREN ZIRKUNFERENTZIA

- Azelerazio tangential nulua duten plano mugikorreko puntuen leku geometrikoa.



$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{AP}^N + \vec{a}_{AP}^T$$

AP-ren elkarzutan proiektatuz:

$$a_A^T = a_P \cos \psi + \alpha r$$

$$\left. \begin{array}{l} a_P = \omega u \\ u = \omega \delta \end{array} \right\} a_P = \omega^2 \delta$$

Ordezkatuz eta $a_A^T = 0$ eginez:

$$0 = \omega^2 \delta \cos \Psi + \alpha r \rightarrow r = -\frac{\omega^2}{\alpha} \delta \cos \psi \left\{ \begin{array}{l} \square \text{ Zirkunf. } \Phi = \frac{\omega^2}{\alpha} \delta \\ \square \Phi \text{ tp-n P-tik pasatzen.} \end{array} \right.$$

Bresseren eta inflexioen zirkunferentziak Q puntuan mozten dira, azeleraziorik gabeko puntua:

Azelerazioen poloa