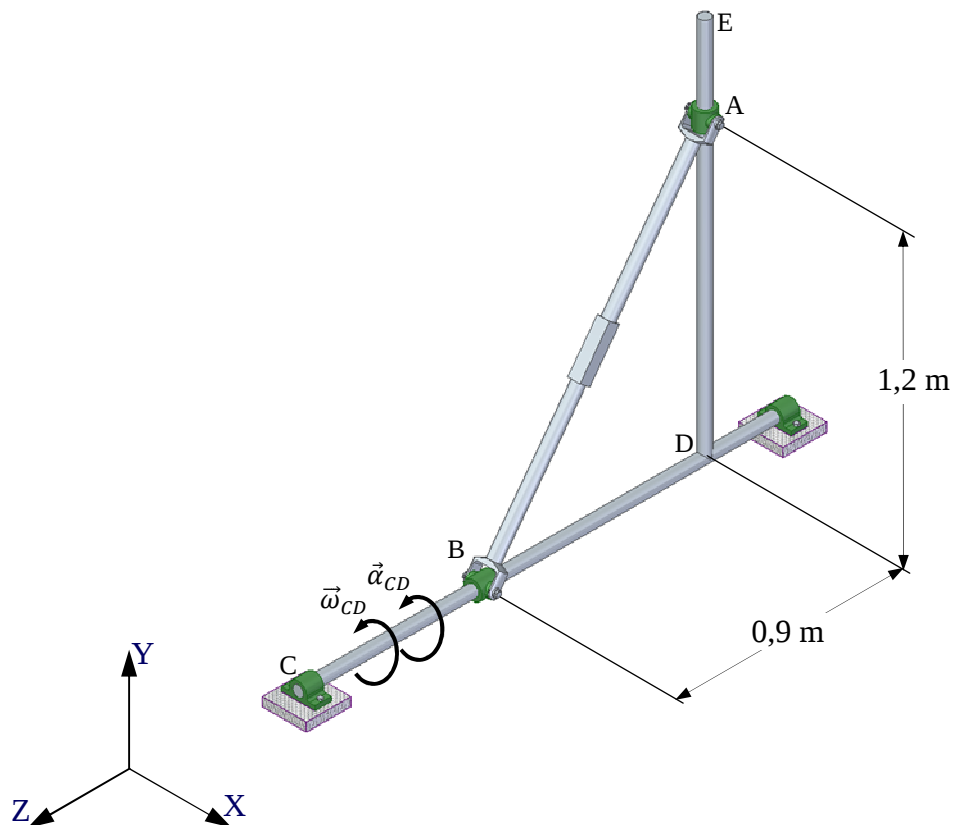


Enuntziatua

CDE barraren abiadura angeluarra $\vec{\omega}_{CD} = 10 \vec{k} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ eta azelerazio angeluarra $\vec{\alpha}_{CD} = 20 \vec{k} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ dira; A irristagailua 0,72m/s-tako abiadurarekin jaisten bada, hurrengoa eskatzen da:

- A eta B irristagailuetako abiadurak eta azelerazioak, AB barrak BDE solidoarekiko duen mugimendu erlatiboa kontsideratuz.
- AB barraren abiadura eta azelerazio angeluarrak.
- B irristagailuren abiadurarako eta azeleraziorako lortutako balioak konprobatu AB barraren mugimendu absolutua kontsideratuz.



1go Irudia

Ebazpena

Mekanismo hau CDE solidoa eta AB barra osatzen dute. CDE solidoa, sistema mugikorra, CD ardatzaren inguruan errotazio hutsa dauka, eta AB barra sistema mugikor horretan mugituko da.

Bi elementuak irristagailuen bidez lotuak daude, eta beraz ez dute komunean punturik izango. Hori dela eta, bi elementuen arteko mugimendu erlatiboa nolabait kontutan hartu behar izango da.

Ariketa bi era ezberdinetan ebatzi daiteke:

a) Bi mugimenduen gainezarketa kontsideratuz, arrastrea eta erlatiboa

AB barraren abiadura eta azelerazioa kalkulatzeko, bere mugimendua bitan banandu behar da:

Arrastre mugimendua, ikusi “2. Bideoa: arrastre mugimendua” bideoa; AB barrak, mugimendua duen CDE solidoan muntatuta egoteagatik daukan mugimendua da. AB barra CDE solidoarekin batera soldatuta kontsideratuz kalkulatzeko da, mugimendu erlatiboa anulatzeko. Kasu honetan Z ardatzaren inguruko errotazio bat da, $\vec{\omega}_{CD} = 10 \vec{k}$ rad/s delarik.

Mugimendu erlatiboa, ikusi “1go Bideoa: mugimendu erlatiboa” bideoa; AB barrak CDE solidotik ikusita daukana da eta arrastre mugimendua anulatzeko kalkulatzeko da. Kasu honetan mugimendu orokor bat da, AB barrak CDE solidotik traslatzeaz gain, X ardatzaren inguruan biratzen baitu, abiadura angeluarra $\vec{\omega}_{rel}$ delarik.

AB barrako edozein puntuko abiadura absolutua kalkulatzeko, puntu horretako arrastre eta abiadura erlatiboak gehitu behar dira. Azelerazioen kasuan arrastrea eta erlatiboa kontutan izateaz gain Coriolis-en azelerazioa gehitu behar da.

Abiaduren kalkulua

Mugimendu erlatiboaren azterketa, AB barraren mugimendua planteatzen da, CDE solidotik ikusita, hau da arrastrea kenduta.

A eta B puntuak barrakoak badira, hurrengoa planteatu daiteke, $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB}$, non $\vec{v}_B$ Z ardatzaren norabidean den, $\vec{v}_A = -0,72 \vec{j}$ datua da eta $\vec{\omega}_{rel}$ X ardatzaren norabidean den.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,72 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{rel} & 0 & 0 \\ 0 & -1,2 & 0,9 \end{vmatrix}; \begin{cases} \vec{i} \rightarrow & 0 = 0 \\ \vec{j} \rightarrow & 0 = -0,72 - 0,9\omega_{rel} \rightarrow \omega_{rel} = -0,8 \text{ rad/s} \\ \vec{k} \rightarrow & v_B = 0 - 1,2\omega_{rel} \quad v_B = 0,96 \text{ m/s} \end{cases}$$

Orain A puntuko abiadura absolutua planteatzen da:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{arrastre}} + \vec{v}'_A$$

non $\vec{v}_{A_{arrastre}}$ A puntua CDE solidokoa balitz edukiko zuen abiadura den.

$$\vec{v}_{A_{arrastre}} = \vec{\omega}_{CD} \wedge \overrightarrow{DA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{arrastre}} + \vec{v}'_A = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,72 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} -12 \\ -0,72 \\ 0 \end{pmatrix} [m/s]$$

Eta B puntuarentzat: $\vec{v}_B = \vec{v}_{B_{arrastre}} + \vec{v}'_B$

$$\vec{v}_{B_{arrastrre}} = 0, \text{ B puntua errotazio ardatzean dagoelako } \vec{v}_B = \vec{v}_{B_{arrastrre}} + \vec{v}'_B \rightarrow \vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,96 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Azelerazioen kalkulua:

Abiadurekin landutako ebazpena oinarritzat hartuz, pausu berdinak jarraitzen dira.

Mugimendu erlatiborako, AB barraren azelerazioen eremua planteatzen da, hau da, CDE solidoaren biraketa anulatuz, A eta B puntuen azelerazioen arteko erlazioa planteatu behar da. A eta B puntuak barrakoak direla kontutan izanda, hurrengoa planteatu daiteke, $\vec{a}'_B = \vec{a}'_A + \vec{a}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (\vec{\omega}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB})$, non $\vec{a}'_B$ Z ardatzaren norabidean doala, $\vec{a}'_A$ nulua dela (A puntuko abiadura erlatiboa konstantea izateagatik), $\vec{a}_{rel}$ X ardatzaren norabidean doala jakina den eta $\vec{\omega}_{rel}$ eta $(\vec{\omega}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB})$ ezagunak diren, abiaduren eremuan kalkulatu baitira. Aurreko ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a'_B \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_{rel} & 0 & 0 \\ 0 & -1,2 & 0,9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,72 & 0,96 \end{vmatrix};$$

$$\begin{cases} \vec{i} \rightarrow 0 = 0 \\ \vec{j} \rightarrow 0 = -0,9\alpha_{rel} + 0,768 \\ \vec{k} \rightarrow a'_B = 0 - 1,2\alpha_{rel} - 0,576 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{rel} = 0,8533 \text{ rad/s}^2 \\ a'_B = -1,6 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

A puntuko azelerazio absolutua:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{arrastrre}} + \vec{a}'_A + \vec{a}_{A_{Coriolis}}$$

A puntua CDE solidokoa balitz, bere azelerazioa, $\vec{a}_{A_{arrastrre}}$ litzateke:

$$\vec{a}_{A_{arrastrre}} = \vec{a}_{CD} \wedge \overrightarrow{DA} + \vec{\omega}_{CD} \wedge (\vec{\omega}_{CD} \wedge \overrightarrow{DA}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -24 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

$$\text{Coriolis-en azelerazioa: } \vec{a}_{A_{Coriolis}} = 2\vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{v}'_A = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -0,72 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 14,4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{arrastrre}} + \vec{a}'_A + \vec{a}_{A_{Coriolis}} = \begin{Bmatrix} -24 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} + 0 + \begin{Bmatrix} 14,4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} -9,6 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Eta B puntuarentzat: $\vec{a}_B = \vec{a}_{B_{arrastrre}} + \vec{a}'_B + \vec{a}_{B_{Coriolis}}$

$$\vec{a}_{Barrastre} = 0 ; \quad \vec{a}'_B = -1,6 \vec{k} [m/s^2]$$

$$\vec{a}_{B_{Coriolis}} = 2\vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{v}'_B = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0,96 \end{vmatrix} = 0 [m/s^2]$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Barrastre} + \vec{a}'_B + \vec{a}_{B_{Coriolis}} \rightarrow \vec{a}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,6 \end{pmatrix} [m/s^2]$$

b) AB barrak CDE solidoarekiko mugimendu erlatiboa dauka. Teoriazko 4.3. atalean ikusi daitekeenez, $\vec{\omega}_1$ abiadura angeluarra duen 1 solidoa emanda (gure kasuan CDE solidoa litzateke, bere abaidura angeluarra $\vec{\omega}_{CD}$ izanik) eta aurrekoaren inguruan abiadura angeluar erlatiboa $\vec{\omega}_{2/1}$ izanik biratzen duen beste sistema definituz, (gure kasuan solidoa eta abiadura angeluarra, AB barra eta $\vec{\omega}_{rel}$ dira), orduan abiadura angeluar absolutua $\vec{\omega}_2$, aurreko biak batuz kalkulatu daiteke:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} \quad (66)$$

Horrela AB barraren abiadura angeluar absolutua hurrengoa da:

$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{CD} + \vec{\omega}_{rel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\omega}_{AB} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} [rad/s]$$

Azelerazioak aztertuz, $\vec{\alpha}_2$ AB barraren azelerazio angeluar absolutua da, $\vec{\alpha}_1$ sistema mugikorrarena edo CDE solidoa ($\vec{\alpha}_{CD}$) eta $\vec{\alpha}_{2/1}$ aurreko atalean kalkulaturiko AB barrak CDE solidoarekiko daukan azelerazio angeluar erlatiboa. Teoriazko (74). adierazpena gogoratuz:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

$$\vec{\alpha}_{AB} = \vec{\alpha}_{CD} + \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8533 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -0,8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{\alpha}_{AB} = \begin{pmatrix} 0,8533 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} [rad/s^2]$$

c) Diskoaren mugimendu absolutua kontsideratuz.

A eta B puntuentzat abiaduren eremua planteatzen da:

$$A \text{ eta } B \text{ puntuak barrakoak direnez, hurrengoa planteatu daiteke: } \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Orain $\vec{\omega}_{AB}$ aurreko atalean lortutako AB barraren abiadura angeluar absolutua dela kontutan izan behar da.

A puntuko abiadura absolutua, arrastrekoa eta erlatiboa gehituz, lehenengo atalean lortu dena da:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{arrastre}} + \vec{v}'_A = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0,72 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Hurrengo ekuazioan ordezkatzuz: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0,72 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,8 & 0 & 10 \\ 0 & -1,2 & 0,9 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0,72 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 0,72 \\ 0,96 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,96 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Emaitz hau eta aurreko atalean lortutakoa berdinak direla konprobatu daiteke.

Solido berdinekoak diren A eta B puntuentzat, azelerazioen eremua planteatzuz:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$$

non $\vec{\alpha}_{AB}$ aurreko b) atalean lortutako AB barraren azelerazio absolutua den:

A puntuko azelerazioa a) atalean kalkulatu da, barrak CDE solidoarekiko duen mugimendu erlatiboa aztertuz, eta hurrengo da: $\vec{a}_A = \begin{Bmatrix} -9,6 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} -9,6 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,8533 & -8 & 20 \\ 0 & -1,2 & 0,9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,8 & 0 & 10 \\ 12 & 0,72 & 0,96 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,6 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Konprobatu nahi zena.

Ondorioak

Lehenengo atalean A eta B puntuetako abiadurak eta azelerazioak kalkulatu dira, AB barrakoak direla kontutan izanda; AB barrak, biratzen dagoen CDE solidoarekin batera errotatzeaz gain, mugimendua orokor bat dauka. Kalkulu honetarako, arrastreko abiadura eta abiadura erlatiboa gehitzen dira eta azelerazioen kasuan, arrastrekoa, erlatiboa eta Coriolis-en azelerazioa kontutan izan behar dira.

b) atalean barraren abiadura eta azelerazio angeluar absolutuak kalkulatu dira, ikusi hurrengo bideoa: “3. Bideoa: mugimendu absolutua”.

c) atalean, B puntuko abiadura eta azelerazioa kalkulatu dira, A puntuak duen translazioari, A puntuaren inguruko errotazio bat gehituz, abiadura eta azelerazio angeluar absolutuak kontsideratuz. Horretarako abiapuntua a) atalean kalkulatu diren A puntuko abiadura eta azelerazioak dira.

c) atalean burututako kalkuluetan A puntua erreferentzia bezala hartu den era berean, B puntua hartu daiteke; “4. Bideoa: euskarria kenduta” bideoa ikusiz, mugimendua hori hausnartzea errazagoa da, hau da B puntuko translazioa eta AB barrak puntu horren inguruan duen errotazioa bereiztu daitezke. Abiadura eta azelerazio angeluarrak beti absolutuak izango dira.