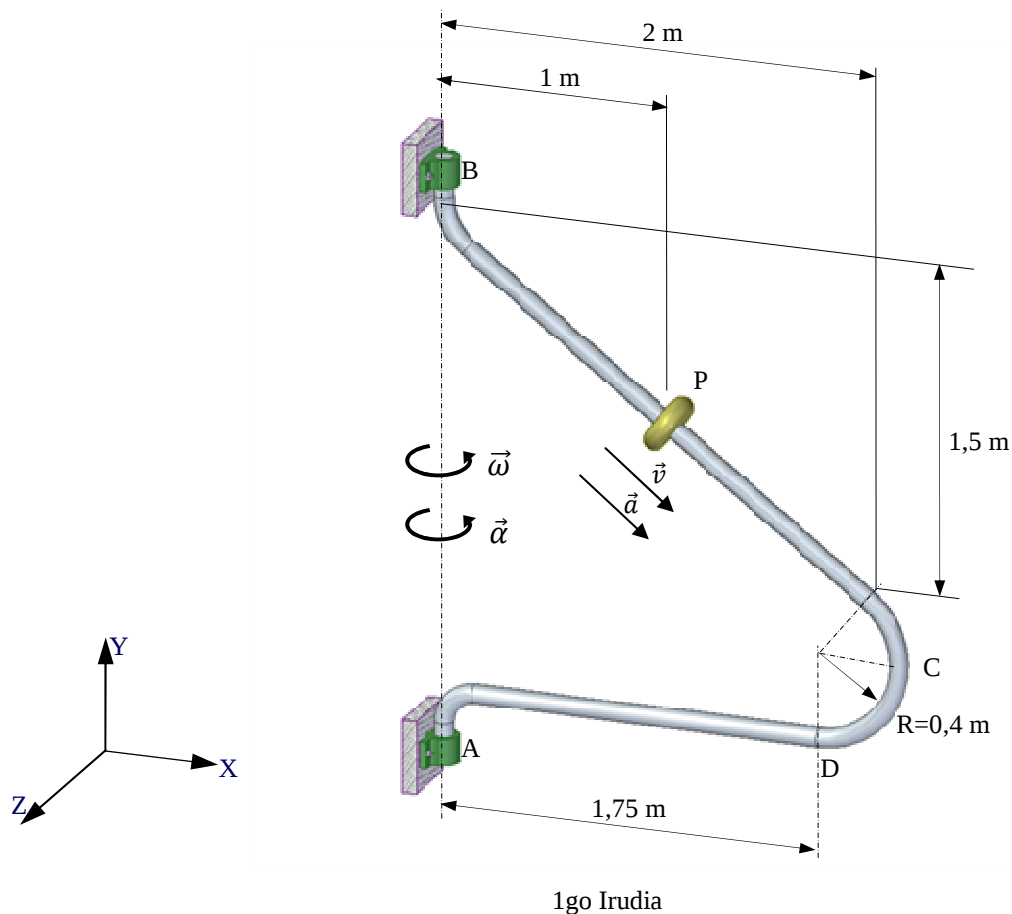


Enuntziatua

BCDA barrak, $\omega = 8 \text{ rad/s}$ eta $\alpha = 4 \text{ m/s}^2$ izanik biratzen du, P puntua D punturantz trasladatzen den bitartean. Diskoa marraztutako posiziotik pasatzerakoan abiadura $v = 0,3 \text{ m/s}$ eta azelerazioa $a = 0,1 \text{ m/s}^2$ dira.

Hurrengoa eskatzen da:

- P puntuko abiadura eta azelerazioa hasierako posizioan.
- P puntuko abiadura eta azelerazioa C puntutik pasatzen denean.



1go Irudia

Ebazpena

Kasu honetan P diskoak barrarekiko mugimendu erlatibo bat dauka. Ariketa hau aurrekoekin konparatzen bada, ezberdintasun nabarmen bat topa daiteke: oraingoa, bi solidoek ez dute punturik amankomunean. Kasu hauetan ariketa bakarrik mugimendu erlatiboa planteatuz ebatzi daiteke.

Hori dela eta, diskoaren mugimendu absolutua, arrastre mugimendua eta mugimendu erlatiboa gainezarriz planteatu behar da. Horretarako A puntuan ardatzari soldaturiko $X'Y'Z'$ erreferentzia sistema eta ardatzeko O' eta O'' puntuak definitzen dira, enuntziatuak eskatzen dituen abiadurak/azelerazioak kalkulatzeko erabiliko baitira, ikusi 2. Irudia.

Mugimendu erlatiboa, diskoak barratik ikusita daukana da eta arrastre mugimendua anulatuz kalkulaten da. Kasu honetan zenbait zati zuzen eta zati kurbo bat daukan ibilbidea jarraitzen duen translazio bat da, ikusi “2. Bideoa: mugimendu erlatiboa” bideoa.



2016 OpenCourseWare

2. Irudia

Teoriazko (56). adierazpenaren arabera, P puntuko abiadura hurrengo kalkulua burutuz lortu daiteke:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_P'}_{v_{erlatiboa}}$$

Arrastreko abiadura kalkulatzeko modurik errazena biraketa ardatzean O' puntua definitzea da.

Abiadura erlatiboa lortzeko, $\vec{v}_P' = 0,3 \cdot \vec{u}_{BP}$ eragiketa burutu behar da, 0,3 modulua eta $\vec{u}_{BP}$ B puntutik P puntura doan eta abiadura erlatiboaren norabidea eta norantzkoa definitzen duen bektore unitarioa izanik.

Aurreko adierazpenean kasu honetako datuak ordezkatzuz eta eragiketak eginez:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_{O'} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O'P}}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_P'}_{v_{erlatiboa}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0,3 \frac{\vec{i} - 0,75\vec{j}}{\sqrt{1^2 + 0,75^2}} \rightarrow \vec{v}_P = \begin{pmatrix} 0,24 \\ -0,18 \\ -8 \end{pmatrix} [m/s]$$

Azelerazioen kalkulurako teoriako (59). adierazpenetik abiatuko gara:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P'}_{a_{erlatiboa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P'}_{a_{Coriolis}}$$

Arrastreko azelerazioa analizatzean O' puntuaren inguruko errotazio hutsa, bi osagai intrintsekoak agertzen direla ikusten da. Azelerazio erlatiboaren norabidea eta norantza, abiaduraren kasuan definitutakoak dira, eta berriz ere modulua eta bektore unitarioa erabiliz definitu daiteke, $\vec{a}_P' = 0,1 \cdot \vec{u}_{BP}$.

Adierazpen honetan, datuak ordezkatuaz eta kalkuluak burutuz:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \underbrace{0 + \vec{a}_1 \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O'P})}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P'}_{a_{erlatiboa}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_P'}_{a_{Coriolis}} \\ \vec{a}_P &= 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} + 0,1 \frac{\vec{i} - 0,75\vec{j}}{\sqrt{1^2 + 0,75^2}} + 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0,24 & -0,18 & 0 \end{vmatrix} \\ &\rightarrow \vec{a}_P = \begin{pmatrix} -63,92 \\ -0,06 \\ -7,84 \end{pmatrix} [m/s^2] \end{aligned}$$

b) P puntuko abiadura eta azelerazioa C puntutik pasatzen denean

Momentu honetan hurrengoa argitzea beharrezkoa da. Solido jakin baterako abiadurak eta azelerazioak kalkulatzeko direnean azterketa, posizio konkretu baterako burutzen da. Erreferentzi sistemak, absolutuak eta erlatiboak, analisisa posizio jakin horretarako ahalik eta gehien sinplifikatu dezaten definitzen dira.

Diskoa hasierako posiziotik abiatuta C puntutik pasatzen denean, BCDA barra angelu jakin bat biratu du eta beraz ez da XY planoan egongo. Diskoaren abaidura/azelerazio absolutuak lortzeko kalkuluak sinplifikatzen duten ardatzak erabili behar dira eta horregatik definitzen diren ardatz berriak aurreko kasuan bezala definitzen dira, Y ardatza bertikala eta X ardatza barraren zati horizontalari paralelo izanik, ikusi 1go Irudia. Barrak, aurreko posizioarekiko biratu duenez, atal honetan erabiliko den erreferentzi sistema, aurreko atalean erabili den sistemarekiko baita ere biratuta dago.

Berriz ere, abiapuntua teoriako (56). adierazpena da, P puntuko abiadura honela kalkulatu:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P'}}_{v_{\text{arrastrere}}} + \underbrace{\vec{v}_{P'}}_{v_{\text{erlatiboa}}}$$

Kasu honetan arrastre abiadura kalkulatzeko errotazio ardatzean O'' puntua definitzen da.

Eta abiadura erlatiboa diskoaren ibilbideari ukitzailea da, beraz Y ardatzaren noranzko negatiboa izango du.

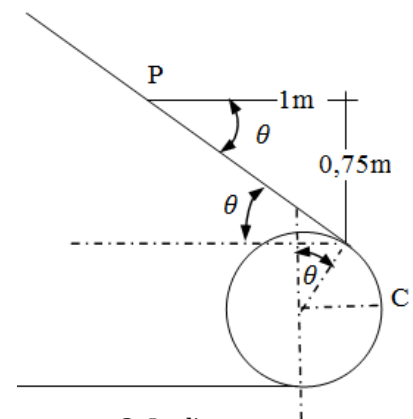
Bestalde, barraren abiadura angeluarra eta diskoaren eta barraren arteko abiadura erlatiboaren balioak 1go Irudian ikusten den posiziorako definituak daude, baina konstanteak ez direnez, posizio berrirako balioak kalkulatu beharko dira. Horretarako diskoa hasierako posiziotik C puntura nola desplazatzen den aztertzea beharrezkoa da, ikusi 3. Irudia:

P eta C puntuen arteko distantzia:

$$\sqrt{1^2 + 0,75^2} + 2 \cdot R \cdot \pi \frac{(90 - \theta)}{360} = 1,25 + 0,37 = 1,62 \text{ m}$$

$$\text{Non } \theta = \arctg \frac{0,75}{1} = 36,86^\circ = 0,64 \text{ rad}$$

Mugimendu erlatiboa aztertzen bada, P diskoaren mugimendua, lehenengo zati zuzen bat eta gero ibilbide kurboa jarraitzen duen partikula bat balitz bezala analizatu daiteke, biak mugimendu uniformeki azeleratuak direlarik.



3. Irudia

Partikula baten mugimendu zuzena eta uniformeki azeleratua aztertzeke erabiltzen diren adierazpenak, hurrengoak dira:

$$S = S_o + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_o + at$$

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_o)$$

Diskoak hasieran duen abiadura (P puntua) eta ibilbidearen luzera ezagutzen direnez, hirugarren ekuazioan ordezkatzuz, ibilbidea zuzena izatetik kurboa izatera pasatzen denean diskoaren abiadura lineala kalkulatu daiteke:

$$v^2 = 0,3^2 + 2 \cdot 0,1 \cdot 1,25 \rightarrow v = 0,58 \text{ m/s}$$

Eta bigarren ekuaziotik horretarako behar den denbora kalkulatu daiteke:

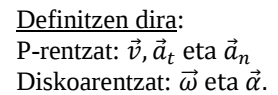
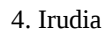
$$v = v_o + at \rightarrow 0,58 = 0,3 + 0,1 \cdot t \rightarrow t = 2,8 \text{ s}$$

Eta ibilbide zirkularra duen partikula baten mugimendua agintzen duten adierazpenak hauek dira:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_o + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega &= \omega_o + \alpha t \\ \omega^2 &= \omega_o^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_o) \end{aligned} \right\}$$

Non θ , ω eta α solido zurraren kasurako definitutako magnitude angeluarrak diren eta azaldutako era berean erabili daitezke.

Mugimendu zirkularra duen partikula. Errotatzen duen disko baten periferian definituriko puntua.



Eta beraz diskoa C puntutik pasatzen den aldiunean:

$$\vec{\omega}_1 = 20,8 \vec{j} [\text{rad/s}^2]$$

Abiadura absolutuaren kalkulua C puntuan:

Azkenik, atal honetan lortutako balioak (56). adierazpenean ordezkatzuz:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_{O''} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O''C}}_{v_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{v}_P'}_{v_{\text{relativa}}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 20,8 & 0 \\ 2,15 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0,62 \vec{j} \rightarrow \vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,62 \\ -44,72 \end{Bmatrix} [\text{m/s}]$$

Azelerazio absolutuaren kalkulua C puntuan:

Azelerazioaren kalkulurako teoriako (59). adierazpena erabiltzen da:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P'}_{a_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{a}_P'}_{a_{\text{relativa}}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P'}_{a_{\text{Coriolis}}}$$

P puntuaren arrastre azelerazioa aztertzerakoan, O'' puntuaren inguruko errotazio hutsa, bi osagai intrintsekoak, agertzen dira. Ikusi den bezala azelerazio erlatiboak bi osagaiak ditu baita ere. Beraz, adierazpenean datuak ordezkatzuz eta eragiketak burutuz:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \underbrace{0 + \vec{a}_1 \wedge \overrightarrow{O''C} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O''C})}_{a_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{a}_P'}_{a_{\text{relativa}}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_P'}_{a_{\text{Coriolis}}} \\ \vec{a}_P &= 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2,15 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 20,8 & 0 \\ 0 & 0 & -44,72 \end{vmatrix} - \underbrace{0,1\vec{j} + 0,961\vec{i}}_{a_{\text{relativa}}} + 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 20,8 & 0 \\ 0 & -0,62 & 0 \end{vmatrix} \\ &\rightarrow \vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -931,1 \\ -0,1 \\ -8,6 \end{Bmatrix} [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

Ondorioak

Ariketa hau aurrekoekin konparatzerakoan bi ezberdintasun nagusi aipatu behar dira; hasteko, ikasten diren bi gorputzak aztertzean bi solidoetakoa den punturik ez dagoenez, ariketa hau mugimendu erlatiboa planteatuz ikasi daiteke bakarrik. Beraz, aurkeztu den bezala bakarrik ebatzi daiteke, aurreko kasuetan planteaturiko bi aukera ezberdinak alde batera utziz. Bestalde, abiaduren/azelerazioen kalkulua bi aldiune ezberdinetan eskatzen da eta arrastreko mugimendua eta mugimendu erlatiboa azeleratuak direnez, abiadurak hasierako aldiunea ez den beste momentu baterako kalkulatu behar dira.