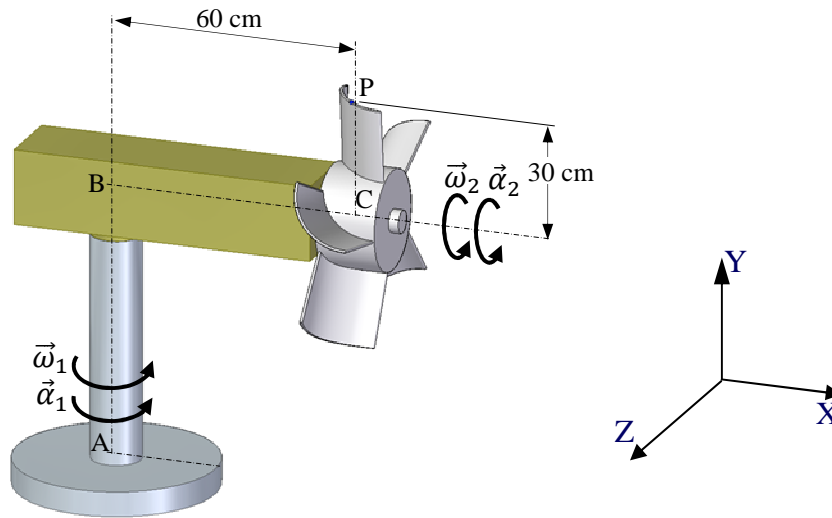


Enuntziatua

Haizegailuaren aspetako abiadura eta azelerazio angeluarrak $\omega_2 = 0,5 \text{ rad/s}$ eta $\alpha_2 = 0,01 \text{ rad/s}^2$ dira, BC ardatzaren inguruan biratzen dutenean. Aldi berean motorraren blokeak eta aspek ardatz bertikal baten inguruan biratzen dute $\omega_1 = 0,1 \text{ rad/s}$ eta $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$ direlarik. Irudian adierazitako posizioan P puntuko abiadura eta azelerazioa kalkulatu.



1go Irudia

Ebazpena

Aurreko ariketan bezala, mekanismoa amankomunean puntu bat duten bi solidoen bidez osatzen da. Bi solidoetako den C puntu definitu daitekeenez, ariketa bi eratan planteatu daiteke, aspetako mugimendu absolutua edo bi biraketan gainezarpena kontsideratuz. Dena den, ariketa edozein eratan planteatu aurretik, ardatzari soldaturiko X'Y'Z' erreferentzi sistema definitu behar da, kasu honetan sistemaren jatorria B puntuan jarriko delarik.

1. Aspetako mugimendu absolutua kontsideratuz.
 - a. Bi solidoetako puntu amankomun bezala C hartuz

Lehenengo solidoa, AB ardatza da eta $\omega_1 = 0,1 \text{ rad/s}$ eta $\alpha_1 = 0,2 \text{ rad/s}^2$ izanik biratzen du. Bigarrena, aspek osatzen duten solidoa, C puntuaren inguruan biratzen du, $\omega_2 = 0,5 \text{ rad/s}$ eta $\alpha_2 = 0,01 \text{ rad/s}^2$ direlarik.

Bi solidoen abiaduren/azelerazioen kalkulua aurreko ariketan azaldu den bezala garatu daiteke. Ardatzaren abiadura eta azelerazio angeluarrak enuntziatuan definituak datoz; aspen abiadura eta azelerazio angeluar absolutuak lortzeko ardatzaren abiadura angeluarrari aspen abiadura angeluar erlatiboa gehitu behar zaio, ondoren azelerazio angeluar absolutua lortzeko, deribatuz.

AB ardatzaren abiadura eta azelerazio angeluarrak: $\vec{\omega}_1 = 0,1\vec{j} \text{ rad/s}$ eta $\vec{\alpha}_1 = 0,2\vec{j} \text{ rad/s}^2$.

Aspetako abiadura eta azelerazio angeluarrak:

$$\vec{\omega}_{aspak} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0,1\vec{j} + 0,5\vec{i} \text{ rad/s;}$$

$$\vec{\alpha}_{aspak} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{aspak}}{dt} \right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \right)_{XYZ} = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \right)_{XYZ} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

Eta beraz:

$$\vec{\alpha}_{aspak} = 0,2\vec{j} + 0,01\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,01\vec{i} + 0,2\vec{j} - 0,05\vec{k} \text{ rad/s}^2$$

Jarraian, bi solidoetako abiaduren eta azelerazioen eremuak planteatzen dira.

Hasteko AB ardatzaren abiaduren eta azelerazioen eremuak planteatzen dira, bi solidoetakoa den C puntuko abiadura eta azelerazioa kalkulatu ahal izateko.

Abiaduren eremua:

Teorian azaltzen denaren arabera solido zurrun berdinekoak diren bi puntuetako abiadurak erlazionatzeko hurrengo adierazpena erabili behar da, (46):

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{ardatza} \wedge \overline{BC}, \text{ non } \vec{v}_B = 0, \text{ errotazioa ardatzekoa ez delako.}$$

$$\vec{v}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,06 \end{pmatrix} [m/s]$$

Azelerazioen eremua:

Teoriaren arabera solido zurrun berdinekoak diren bi puntuetako azelerazioen artean hurrengo erlazioa betetzen da, (48):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{ardatza} \wedge \overline{BC} + \vec{\omega}_{ardatza} \wedge (\vec{\omega}_{ardatza} \wedge \overline{BC})$$

$$\vec{a}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,06 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_C = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0 \\ -0,12 \end{pmatrix} [m/s^2]$$

Jarraian, bigarren solidoa aztertzen da, aspak. Solido horretako magnitude angeluarrak $\vec{\omega}_{aspak}$ eta $\vec{\alpha}_{aspak}$ eta C puntuko abiadura eta azelerazioa ezagutzen dira.

Abiaduren eremua:

Aurreko (46). ekuazioa berriro planteatuz, kasu honetan aspatako C eta P puntuetako abiadurak erlazionatuz:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{aspak} \wedge \overline{CP}$$

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,06 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,09 \end{pmatrix} [m/s]$$

Azelerazioen eremua:

Teoriaren arabera, solido berdinekoak diren bi puntuetako azelerazioak hurrengo adierazpena erabiliz erlazionatu behar dira, (48):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{aspak} \wedge \overline{CP} + \vec{\omega}_{aspak} \wedge (\vec{\omega}_{aspak} \wedge \overline{CP})$$

$$\vec{a}_P = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0 \\ -0,12 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,01 & 0,2 & -0,05 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_P = \begin{pmatrix} 0,024 \\ -0,075 \\ -0,117 \end{pmatrix} [m/s^2]$$

b. Bi solidoetako puntu amankomun bezala B puntua erabiliz

Aspak, haien ardatza AB elementua moztu arte luzatu daitezke, era honetan B puntua bigarren solidokoa, hau da aspetakoa, izango delarik. Marrazkiak ez du aspetako ardatza noraino heltzen den adierazten eta beraz BC blokearen barrutik luzatu daiteke eta beraz B puntua aspak izendaturiko solidorena dela kontsideratu daiteke.

Abiaduren eremua:

B eta P puntuak solido berdinekoak direnez, (46). adierazpena berriro planteatzen da; oraingoa aurreko kasuan baino sinpleago geratzen da, B puntua finkoa baita.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{aspak} \wedge \overline{BP}$$

$$\vec{v}_P = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,6 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,09 \end{pmatrix} [m/s]$$

Azelerazioen eremua:

Teoriaren arabera (48). adierazpena erabili behar da solido zurrun berdinekoak diren bi puntuetako azelerazioak kalkulatzeko:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{aspak} \wedge \overline{BP} + \vec{\omega}_{aspak} \wedge (\vec{\omega}_{aspak} \wedge \overline{BP})$$

$$\vec{a}_P = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0 \\ -0,12 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,01 & 0,2 & -0,05 \\ 0,6 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,09 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_P = \begin{pmatrix} 0,024 \\ -0,075 \\ -0,117 \end{pmatrix} [m/s^2]$$

2. Bi mugimenduen gainezarpena kontsideratuz, arrastrea eta mugimendu erlatiboa

Berriz ere, abiapuntua bi mugimenduak ezberdintzea da:

Arrastre mugimendua ardatzaren biraketaren ondorioz agertzen da eta aspak arrastratzen ditu Y ardatzaren inguruko biraketa batetan. Errotazio hau $\vec{\omega}_1 = 0,1\vec{j}$ rad/s eta $\vec{\alpha}_1 = 0,2\vec{j}$ rad/s² magnitude angeluarren bidez definitzen da.

Mugimendu erlatiboa C puntuan AB ardatzari soldatuta dagoen eta $\vec{\omega}_1 = 0,1\vec{j}$ rad/s eta $\vec{\alpha}_1 = 0,2\vec{j}$ rad/s² abiadura eta azelerazio angeluarrekin biratzen duen X'Y'Z' sistema mugikorretik ikusten da. Mugimendu erlatiboan, aspek C puntuaren inguruan biratzen dute, abiadura eta azelerazio angeluarrak $\omega_2 = 0,5$ rad/s eta $\alpha_2 = 0,01$ rad/s² direlarik, biak X ardatzaren norabide positiboan definituak.

Teoriazko (56). adierazpenaren arabera P puntuko abiadura hurrengo kalkulua burutuz lortzen da:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P'}}_{v_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{v}_{P'}}_{v_{\text{erlatiboa}}}$$

Arrastre abiadura aspetako mugimendua kenduta P puntuak daukana da. Kasu honetan, P puntua zuzenean ardatzaren inguruan biratzen ikusten da, errotazio huts bat eta magnitude angeluarrak $\vec{\omega}_1$ eta $\vec{\alpha}_1$ izanik. Aurreko adierazpena garatzean ikusiko denez C eta P puntuek ardatzaren inguruko arrastre abiadura berdina dute, distantzia berdiner daudelako.

Abiadura erlatiboa ardatzean dagoen behatzaile batek ikusten duena da. C puntuaren inguruko errotazio bat da eta beraz periferian dagoen P puntuko mugimendua higidura zirkularra eta laua balitz bezala aztertu daiteke, ikusi teoriazko 3.3.1. atala. Abiadura ibilbideari ukitzailea da, bere modulua $\omega_2 \cdot R$ delarik.

Aurreko adierazpenean kasu honetarako datuak ordezkatzuz eta eragiketak eginez:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_C + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{CP}}_{v_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{v}_{P'}}_{v_{\text{erlatiboa}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,06 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{vmatrix} + 0,15\vec{k} \rightarrow \vec{v}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,09 \end{pmatrix} [m/s]$$

Azelerazioen kalkulurako teoriazko (59). adierazpena erabiltzen da:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{P'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P'})}_{a_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{a}_{P'}}_{a_{\text{erlatiboa}}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P'}}_{a_{\text{Coriolis}}}$$

Arrastre azelerazioa P puntuaren AB ardatzaren inguruko errotazioaren ondorioz dator; $\vec{\omega}_1$ konstantea ez denez arrastreko azelerazio normala eta tangentiala agertuko dira. Mugimendua aztertzerakoan C eta P puntuek AB ardatzaren inguruko antzeko mugimenduak dituztela ikusi daiteke, ardatzeraino dagoen distantzia bi kasutan berdina delako. Horregatik analitikoki konprobatuko denez P puntuko arrastre azelerazioa zuzenean C puntukoa izango da.

Azelerazio erlatiboa P puntuak C puntuaren inguruan duen biraketa aztertuz kalkulatzen da eta $\vec{\omega}_2$ konstantea ez denez, azelerazio erlatibo normala eta azelerazio erlatibo tangenziala agertuko dira. Teoriazko 3.3.1. atalaren arabera, azelerazio erlatibo normala zirkunferentziaren zentrorantz zuzenduta egongo da eta bere moduluak $\omega_2^2 \cdot R$ balio da. Azelerazio tangenzial erlatiboa $\alpha_2 \cdot R$ da, zirkunferentziari ukitzaile, abiaduraren norantzan.

Adierazpena kasu honetarako partikularizatuz, datuak ordezkatzuz eta eragiketak burutuz:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_C + \vec{a}_1 \wedge \overline{CP} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overline{CP})}_{a_{\text{arrastre}}} + \underbrace{\vec{a}_{P'}}_{a_{\text{erlatiboa}}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{P'}}_{a_{\text{Coriolis}}}$$

$$\vec{a}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} -0,006 \\ 0 \\ -0,12 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{\text{arrastre}}} - \underbrace{0,5^2 \cdot 0,3\vec{j}}_{a_{P'} \text{ normala}} + \underbrace{0,01 \cdot 0,3\vec{k}}_{a_{P'} \text{ tangenziala}} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 \end{vmatrix}}_{a_{\text{Coriolis}}}$$

$$\vec{a}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} -0,006 \\ 0 \\ -0,12 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{\text{arrastre}}} - \underbrace{0,5^2 \cdot 0,3\vec{j}}_{a_{P'} \text{ normala}} + \underbrace{0,01 \cdot 0,3\vec{k}}_{a_{P'} \text{ tangenziala}} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 \end{vmatrix}}_{a_{\text{Coriolis}}}$$

$$\rightarrow \vec{a}_P = \begin{pmatrix} 0,024 \\ -0,075 \\ -0,117 \end{pmatrix} [m/s^2]$$

Ondorioak

Ariketa hau eta aurrekoak antzekoak dira. Aztertu behar den solidoaren mugimendua bi biraketen gainezarpenera bezala ikasi daiteke, aspak ardatz finko baten inguruan errotatzen dagoen euskarri batekiko biratzen daudelako. Bi solidoek amankomunean puntu bat dutenez, ariketa bi era ezberdinetan garatu daiteke, aspen analisia bere magnitude angeluar absolutoen bidez burutuz edo bestela mugimendu erlatiboa planteatuz.

Ariketa hau aurrekoarekin konparatuz, ezberdintasun nagusia C puntua errotazio ardatzean ez gotean datza, eta ondorioz bere abiadura eta bere azelerazioa ez dira nulua izango.