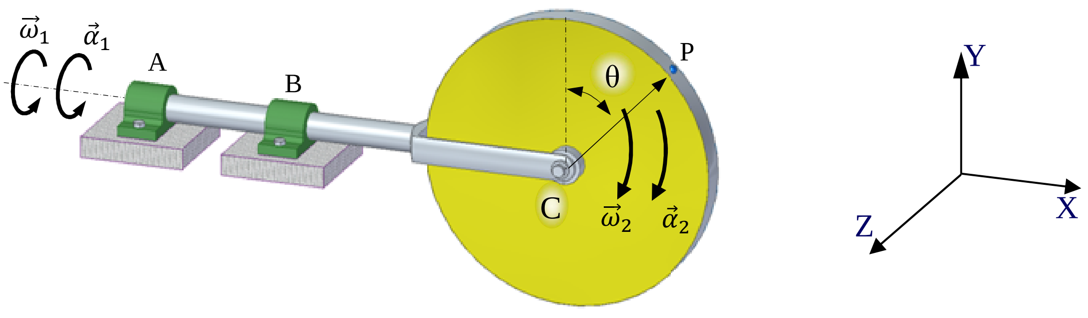
Enuntziatua

AB ardatzean muntatuta dagoen eta r=50mm-tako erradioa duen diskoa bere zentroarekiko biratzen du ω_2 =12 rad/s eta α_2 =2 rad/s^2 direlarik. Aldi berean, AB ardatzaren abiadura eta azelerazio angeluarrak ω_1 =8 rad/s eta α_1 =1 rad/s^2 dira. Kalkulatu P puntuko abiadura eta azelerazioa θ=0º denean.



1go Irudia

Ebazpena

Ariketa honetan errotatzen dagoen solido baten gainean biratzen dagoen beste solido bat dago, bi solidoak puntu amankomun baten bidez, kasu honetan C puntua, elkartzen direlarik. Mota honetako ariketak bi era ezberdinetan ebatzi daitezke:

1. Diskoaren mugimendu absolutua kontsideratuz, ikusi teoriazko 3.6. atala. Planteamendu hau posiblea izan dadin bi solidoek amankomunean puntu bat izan behar dute.

2. Diskoaren mugimendu totala, bi mugimenduen gainezarpena bezala aztertuz, arrastrea eta mugimendu erlatiboa.

Dena den, edozein azterketa burutzeko ardatzari soldatuta doan X'Y'Z' erreferentzi sistema definitu behar da. Kasu honetan errazena bere jatorria C puntuan definitzea da.

1go era — Diskoaren mugimendu absolutua kontsideratuz

Ariketa era honetan planteatzeko mekanismoa amankomunean puntu bat duten bi solidoen bidez osaturik dagoela kontsideratu behar da. AB ardatza, ω_1 =8 rad/s eta α_1 =1 rad/s^2 izanik, lehenengo solidoa da eta bigarren solidoa, ω_2 =12 rad/s eta α_2 =2 rad/s^2 izanik C puntuaren inguruan biratzen duen diskoa da. Azkenik, begi bistakoa da, C puntua bi solidotakoa dela eta beraz abiadura eta azelerazio berdina izango du lehenengo solidokoa, zein bigarren solidokoa izanda aztertuz.

Abiapuntua bi solidoetako abiadura eta azelerazio angeluarrak kalkulatzea da. Ardatzaren kasuan, bere abiadura eta azelerazio angeluarrak zuzenean enuntziatuan definituak datoz. Dena den, diskoaren abiadura kalkulatzeko ardatzaren abiadura eta diskoak C puntuaren inguruan biratzerakoan duen abiadura gehitu behar dira. Bere azelerazioa kalkulatzeko, abiadura deribatzen da, $\vec{\omega}_2$ bektorea ardatzarekin batera biratzen duen erreferentzi sistema batetan definituta dagoela kontutan izanda, eta beraz Boureren legea aplikatuz. Honela hurrengoa lortzen da:

AB ardatzaren abiadura eta azelerazio angeluarrak: $\vec{\omega}_1 = 8\vec{\imath}$ rad/s eta $\vec{\alpha}_1 = 1\vec{\imath}$ rad/s^2.

Diskoaren abiadura eta azelerazio angeluarrak:

$$\vec{\omega}_{disko} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 8\vec{\imath} - 12\vec{k}\ rad/s$$

$$\vec{\alpha}_{disko} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{disco}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{XYZ}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{XYZ}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{XYZ}} = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{X'Y'Z'}} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\alpha}_{disko} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

Eta beraz:

$$\vec{\alpha}_{disko} = \vec{\imath} - 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + 96\vec{\jmath} - 2\vec{k}\ rad/s^2$$

Jarraian bi solidoetako abiadura eta azelerazio eremuak planteatzen dira. Solido batetako abiaduren/azelerazioen eremua planteatzeko bere magnitude angeluarrak, hau da $\vec{\omega}$ eta $\vec{\alpha}$, eta solidokoa den puntu batetako abiadura/azelerazioa ezagutzea beharrezkoa da. AB ardatzaren analisia planteatzen hasi behar da, horrela bi solidoek amankomunean duten puntuaren abiadura eta azelerazioa kalkulatu ahal izateko. Kasu honetan C puntua AB errotazio ardatzean dagoenez, begi bistakoa da bere abiadura eta azelerazioa nuluak direla.

Azkenik bigarren solidoa analizatzen da, hau da diskoa. Solidokoa den C puntuko abiadura/azelerazioa eta diskoaren magnitude angeluarrak $\vec{\omega}_{disko}$ eta $\vec{\alpha}_{disko}$ ezagutzen dira.

Abiaduren eremua:

Teorian agertzen den adierazpenaren arabera (46), solido berdinekoak diren bi puntuetako abiadurak hurrengo eran erlazionatzen dira:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{C}} + \vec{\omega}_{disko} \wedge \overrightarrow{CP}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & -12 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

<u>Azelerazioen eremua</u>:

Teoriaren arabera solido berdinekoak diren bi puntuetako azelerazioak honela erlazionatzen dira, (48):

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{C}} + \vec{\alpha}_{disko} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega}_{disko} \wedge \left(\vec{\omega}_{disko} \wedge \overrightarrow{CP}\right)$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 96 & -2 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & -12 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{a}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0{,}1 \\ -10{,}4 \\ 0{,}05 \end{Bmatrix} [m/s^2]}$$

Ondorioa: kasu honetan, C puntua biraketa ardatzekoa denez, P puntua bere inguruan biratzen dagoela kontsideratu daiteke, magnitude angeluarrak mugimendu totalarenak izango direlarik. Mugimendu hau "*4. Bideoa: euskarria kenduta*" bideoan ikusi daiteke, bertan mugimendu absolutua hobeto aztertzeko asmoarekin euskarriak kendu direlarik.

2. era Bi mugimenduak kontsideratuz (arrastrea eta erlatiboa)

Mugimendu erlatiboa definitu ahal izateko, behintzat bi elementu egon behar dira, arrastreko mugimendua duen solido bat eta lehenengo solido horrekiko mugimendu erlatiboa duen beste solido bat; bi mugimenduak garbi definitzen hasi behar da:

Arrastre mugimendua, bigarren solidoa edo partikula, mugitzen duen elementuak daukana da, ikusi "*2. Bideoa: arrastre mugimendua*" bideoa. Kasu honetan, AB ardatzak, diskoa bere abiadura eta azelerazio angeluarrarekin biratzera behartzen du, hau da $\vec{\omega}_1 = 8\vec{\imath}$ rad/s eta $\vec{\alpha}_1 = 1\vec{\imath}$ rad/s^2 baliotako magnitude angeluarrekin.

Solidoaren edo partikularen mugimendu erlatiboa, erreferentzi sistema mugikorrean dagoen behatzaile batek ikusten duena da, ikusi "*1go Bideoa: mugimendu erlatiboa*" bideoa. Aurrerago komentatu denez, kasu honetan C puntuan AB ardatzari soldaturiko X'Y'Z' erreferentzi sistema definitu da. Mugimendu erlatiboan, diskoaren magnitude angeluarrak $\omega_2 = 12$ rad/s eta $\alpha_2 = 2$ rad/s^2 dira.

Teorian agertzen den adierazpena kontutan izanda (56), P puntuko abiadura hurrengo kalkulua burutuz lortu daiteke:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{erlatiboa}}$$

Arrastreko abiadura, diskoaren mugimendua anulatuz gero P puntuak izango lukeena da. Kasu honetan, P puntua zuzenean ardatzaren inguruan biratzen egongo zen, errotazio hutsezko mugimendu bat magnitude angeluarrak $\vec{\omega}_1$ eta $\vec{\alpha}_1$ izanik. Teorian garatu den bezala, errotazio hutsarekin mugitzen den solido zurrun bat kasurako, puntu batetako abiadura/azelerazioa, ardatzeko edozein puntu (kasu honetan C puntua) erreferentzia bezala hartuz kalkulatzen da.

Abiadura erlatiboa ardatzean muntatuta doan behatzaile batek diskoa analizatzean ikusten duena da. Behatzaile horrek, diskoa bere zentrotik pasatzen den ardatz baten inguruan biratzen ikusiko du eta ondorioz, periferian dagoen P puntuko abiadura mugimendu zirkular laua kontsideratuz kalkulatu daiteke, ikusi teoriazko 3.3.1. atala. Abiadura, ibilbideari ukitzailea da bere moduluaren balioa $\omega_2 \cdot R = 12 \cdot 0{,}05 = 0{,}6$ izanik.

Aurreko adierazpena kasu honetarako partikularizatuz, datuak ordezkatuk eta eragiketak burutuz:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}}=\underbrace{\vec{v}_{\mathrm{C}}+\vec{\omega}_1\wedge\overrightarrow{\mathrm{CP}}}_{v\,arrastre}+\underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{erlatiboa}}=0+\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\8&0&0\\0&0{,}05&0\end{vmatrix}+0{,}6\vec{\imath}\;\rightarrow\;\vec{v}_{\mathrm{P}}=\begin{Bmatrix}0{,}6\\0\\0{,}4\end{Bmatrix}[m/s]$$

Azelerazioen kalkulurako teorian agertzen den adierazpenetik abiatu behar gara, (59):

$$\vec{a}_{\mathrm{P}}=\underbrace{\vec{a}_{\mathrm{A}}+\vec{\alpha}\wedge\vec{r}_{\mathrm{P}}{}'+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_{\mathrm{P}}{}')}_{a_{arrastre}}+\underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{erlatiboa}}+\underbrace{2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

Aurrerago abiadurak aztertzerakoan gertatu den bezala, arrastreko azelerazioa kalkulatzeko P puntua AB ardatzaren inguruan biratzen kontsideratu behar da; $\vec{\omega}_1$ konstantea ez denez, azelerazio tangentziala eta normala agertuko dira. Azelerazio erlatiboa P puntuak C puntuaren inguruan duen errotazioa aztertuz kalkulatzen da eta $\vec{\omega}_2$ konstantea ez denez, berriro azelerazio normala eta tangentziala agertuko dira. Teoriazko 3.3.1 atalaren arabera, azelerazio erlatibo normala zirkunferentziaren zentrorantz zuzenduta dago eta bere modulua $\omega_2^2\cdot R$ da. Azelerazio erlatibo tangentziala zirkunferentziari ukitzailea da, bere balioa $\alpha_2\cdot R$ delarik.

Adierazpen honetan kasu honetako datuak ordezkatuz eta eragiketak burutuz:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}}=\underbrace{0+\vec{\alpha}_1\wedge\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\vec{\omega}_1\wedge\left(\vec{\omega}_1\wedge\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)}_{a_{arrastre}}+\underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{erlatiboa}}+\underbrace{2\vec{\omega}_1\wedge\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}}=\underbrace{0+\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\1&0&0\\0&0{,}05&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\8&0&0\\0&0&0{,}4\end{vmatrix}}_{a_{arrastre}}-\underbrace{7{,}2\vec{\jmath}+0{,}1\vec{\imath}}_{a_{erlatiboa}}+\underbrace{2\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\8&0&0\\0{,}6&0&0\end{vmatrix}}_{a_{Coriolis}}\rightarrow\vec{a}_{\mathrm{P}}=\begin{Bmatrix}0{,}1\\-10{,}4\\0{,}05\end{Bmatrix}[m/s^2]$$

Ondorioak

Ariketa honetan solidoaren mugimendua bi errotazio ezberdinen gainezarpena planteatuz aztertu daiteke. Deskonposaketa hau, mugimendua daukan solido bat, iadanik mugimenduan dagoen beste solido baten gainean muntatzen denean posiblea da.
Mekanismoa osatzen duten bi solidoek amankomunean puntu bat badute, azaldutako bi ebazpenak posibleak dira: bigarren solidoaren mugimendua, bere magnitude absolutuak erabilita aztertuz edo mugimendu erlatiboaren planteamendua erabiliz.