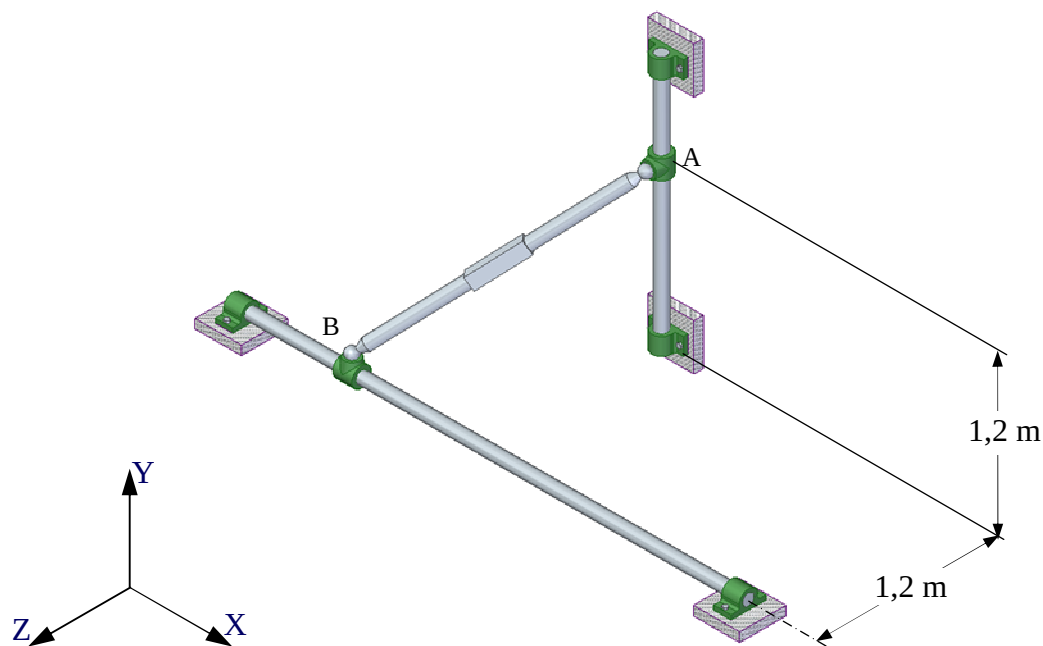


Enuntziatua

AB barra 2,2 metrotako luzera dauka eta A eta B puntuetako bi irristagailuei errotulen bidez lotuta dago. A puntuko irristagailua beherantz 0,63 m/s -tako abiadura konstantearekin transladatzen dela jakinda,

- a) B puntuaren azelerazioa kalkulatu.
- b) B puntuaren abiadura kalkulatu bere ardatzaren inguruko biraketa mesprezatu.
- c) B puntuaren azelerazioa kalkulatu.
- d) B puntuaren abiadura kalkulatu bere ardatzaren inguruko biraketa mesprezatu.

Errotuletako dimentsioak eta barretako diametroak mesprezatu, errotula bakoitzaren zentroa dagokion ardatzetik desplazatuko balitz bezala.



1. go Irudia

Ebazpena

AB barraren mugimendua aztertzean, translazio hutsa ez duela ikusten da, bere orientazioa aldatzen baitu; bestalde, A eta B puntuetako ibilbideak zuzenak jarraitzen dira, ez dituzte zirkunferentzia zentrokideak definitzen eta beraz ez da errotazio hutsa izango.

Ezagutzen dena:

A puntuko abiadura eta azelerazioa, moduluak eta azelerazioak: A puntua zuzen bertikal bat jarraituz mugitzera behartuta dago, beraz abiadura eta azelerazioa Y ardatzaren norabidean doaz. Enuntziatuaren arabera, A puntua beherantz mugitzen da, $0,63 \text{ m/s}$ -tako abiadura konstantearekin. Beraz:

$$\vec{v}_A = -0,63 \vec{j} \quad ; \quad \vec{a}_A = 0$$

B puntuko abiadura eta azelerazioa, moduluak eta azelerazioak: B puntua zuzen horizontal batetik mugitzen da, beraz abiadura eta azelerazioa X ardatzaren norabidean doaz. Norantza, mugimendua aztertuz asmatu daiteke; dena den positiboa dela suposatuko da, eta kalkuluak burutzean moduluaren emaitza negatiboa ateratzen bada, suposaketa okerra izan dela ondorioztatzen da.

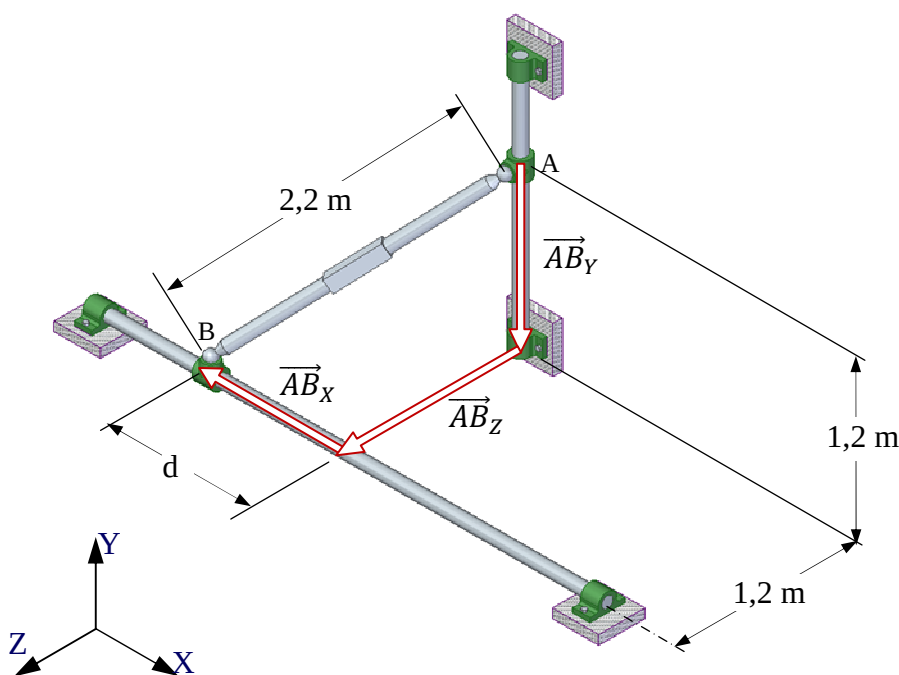
$$\vec{v}_B = v_B \vec{i} \quad ; \quad \vec{a}_B = a_B \vec{i}$$

Ezagutzen ez dena:

Solidoaren abiadura angeluarra, ez dira modulu ezta hiru osagaiak ezagutzen.

2. Irudian, $\overrightarrow{AB}$ bektorearen osagaiak ikusten dira; horietariko bi hasieratik ezagunak dira, hirugarren osagaia, $\overrightarrow{AB}_X$, ezezaguna izango delarik. $\overrightarrow{AB}$ bektorearen modulu eta barraren luzera berdinak izan behar direnez, falta den osagaia kalkulatu daiteke.

$$\overline{AB} = \sqrt{(\overline{AB}_X)^2 + (\overline{AB}_Y)^2 + (\overline{AB}_Z)^2} \quad ; \quad \overline{AB}_X = \sqrt{2,2^2 - 1,2^2 - 1,2^2} = 1,4 \text{ m}$$



2. Irudia

a) Abiaduren eremua

A eta B puntuetarako abiaduren eremua planteatzen da:

A eta B puntuak $\in$ barra betetzen denez: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} v_B \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -0,63 \\ 0 \end{cases} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ -1,4 & -1,2 & 1,2 \end{vmatrix}; \begin{cases} \vec{i} \rightarrow v_B = 0 + 1,2\omega_Y + 1,2\omega_Z & (1) \\ \vec{j} \rightarrow 0 = -0,63 - 1,4\omega_Z - 1,2\omega_X & (2) \\ \vec{k} \rightarrow 0 = 0 - 1,2\omega_X + 1,4\omega_Y & (3) \end{cases}$$

Abiadura angeluarraren hiru osagaiak (1), (2) eta (3) ekuazioetan determinante baten bidez lortzen den erlazio lineal bat betetzen dutela ezaguna da. Ekuazioek betetzen duten erlazio lineala topatuz, abiadura angeluarraren osagaien bat anulatu ahal izango da. Ekuazioak hurrengo eragiketaren bidez erlazionatuz:

$$(1) \cdot 1,4 + (2) \cdot 1,2 - (3) \cdot 1,2$$

Lortzen den ekuazioa baita ere betetzen da:

$$v_B \cdot 1,4 = (1,2\omega_Y + 1,2\omega_Z) \cdot 1,4 + (-0,63 - 1,4\omega_Z - 1,2\omega_X) \cdot 1,2 - (-1,2\omega_X + 1,4\omega_Y) \cdot 1,2$$

$\vec{\omega}$ -ren osagaiak anulatzeko dira eta ekuazio berri bat lortzen da, bertatik v_B kalkulatu ahal izango delarik:

$$v_B \cdot 1,4 = -0,63 \cdot 1,2 \rightarrow v_B = -0,54 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_B = -0,54 \vec{i} \text{ [m/s]}$$

b) B puntuko abiadura kalkulatu da baina barraren abiadura angeluarra indeterminatua dago, A eta B puntuetako abiadurek, barrak bere ardatzaren inguruan duen biraketan eraginik ez baitaukate. A eta B puntuak geldirik suposatuz barrak bere ardatzaren inguruan biratu dezakeela pentsatuz, haien abiadurek barrak bere ardatzaren inguruan duen biraketan eraginik ez dutela erraz ulertu daiteke, ikusi, “1go Bideoa: mugimendu orokorra”.

Barraren abiadura angeluarra indeterminatua dagoenez, bere ardatzaren inguruko biraketa blokeatuz ezezagun bat kendu daiteke, idei honen simulazioa “2. Bideoa: barraren biraketa” izeneko bideoan ikusi daiteke. Barraren norabidean doan abiadura angeluarra mesprezatzen da, hau da abiadura angeluarra barrari elkarzuta dela suposatzen da. Ondorioz, abiadura angeluarra eta barraren norabidea duen edozein bektore eskalarki biderkatuz emaitza nulua izango da. Beraz, hurrengoa planteatu daiteke:

$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; (\omega_X \vec{i} + \omega_Y \vec{j} + \omega_Z \vec{k}) + (-1,4 \vec{i} - 1,2 \vec{j} + 1,2 \vec{k}) = 0$$

eta laugarren ekuazioa lortzen da:

$$-\omega_X 1,4 - \omega_Y 1,2 + \omega_Z 1,2 = 0 \quad (4)$$

Beraz oraingoan hiru osagaiak lortu daitezke:

$$(1) \quad -0,54 = 0 + 1,2\omega_Y + 1,2\omega_Z; \omega_Z = -0,45 - \omega_Y$$

$$(3) \quad 0 = 0 - 1,2\omega_X + 1,4\omega_Y; \omega_X = \frac{1,4}{1,2} \omega_Y$$

$$(4) \quad -\frac{1,4}{1,2} \omega_Y 1,4 - \omega_Y 1,2 + (-0,45 - \omega_Y) 1,2 = 0 \quad ; \quad \omega_Y = 0,1339$$

$$\omega_X = 0,1562 \quad ; \quad \omega_Z = 0,5839$$

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0,1562 \\ 0,1339 \\ -0,5839 \end{Bmatrix} [\text{rad/s}]$$

c) Azelerazioen kalkulurako era berean lan egiten da:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$$

Abiaduren kalkuletatik $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$ biderkadura bektoriala askatzen da:

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \begin{Bmatrix} -0,54 \\ 0,63 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_B \vec{i} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_X & \alpha_Y & \alpha_Z \\ -1,4 & -1,2 & 1,2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,1562 & 0,1339 & -0,5839 \\ -0,54 & 0,63 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{i} \rightarrow a_B = 0 + 1,2\alpha_Y + 1,2\alpha_Z + 0,3678 & (5) \\ \vec{j} \rightarrow 0 = 0 - 1,4\alpha_Z - 1,2\alpha_X + 0,3153 & (6) \\ \vec{k} \rightarrow 0 = 0 - 1,2\alpha_X + 1,4\alpha_Y + 0,1707 & (7) \end{cases}$$

Aurreko ekuazioekin lan eginez α -ren osagaiak ezabatzen dira, abiadura angeluarren kasuan erabili den konbinazio berdina burutuz:

$$(1) \cdot 1,4 + (2) \cdot 1,2 - (3) \cdot 1,2$$

$$a_B \cdot 1,4 = (1,2\alpha_Y + 1,2\alpha_Z + 0,3678) \cdot 1,4 + (-1,4\alpha_Z - 1,2\alpha_X + 0,3153) \cdot 1,2 - (0 - 1,2\alpha_X + 1,4\alpha_Y + 0,1707) \cdot 1,2$$

$$a_B \cdot 1,4 = 0,3678 \cdot 1,4 + 0,3153 \cdot 1,2 - 0,1707 \cdot 1,2 \quad \rightarrow \quad a_B = 0,4918 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = 0,4918 \vec{i} [\text{m/s}^2]$$

d) B puntuko azelerazioa kalkulatu eta gero, abiadurekin jarraitutako pausuak errepikatuz, barrak bere ardatzaren inguruan duen biraketa blokeatu daiteke, eta barraren ardatzari elkarzuta den planoan azelerazioaren bi osagaiak lortu. Azelerazio angeluarra eta barraren norabidea duen bektore unitarioa eskalarki biderkatuz, emaitzak nulua izan behar du:

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; \quad (\alpha_X \vec{i} + \alpha_Y \vec{j} + \alpha_Z \vec{k}) + (-1,4 \vec{i} - 1,2 \vec{j} + 1,2 \vec{k}) = 0$$

eta laugarren ekuazioa lortzen da:

$$-\alpha_X 1,4 - \alpha_Y 1,2 + \alpha_Z 1,2 = 0 ; \quad -\alpha_X \frac{1,4}{1,2} - \alpha_Y + \alpha_Z = 0 \quad (8)$$

Aurreko ekuazio eskalarretan ordezkatzuz hiru osagaiak lortzen dira:

$$(5) \quad 0,4918 = 0 + 1,2\alpha_Y + 1,2\alpha_Z + 0,3678 ; \quad \alpha_Z = 0,1033 - \alpha_Y$$

$$(7) \quad 0 = -1,2\alpha_X + 1,4\alpha_Y + 0,1707 ; \quad \alpha_X = 0,1422 + \frac{1,4}{1,2}\alpha_Y$$

$$(8) \quad -\left(0,1422 + \frac{1,4}{1,2}\alpha_Y\right) \frac{1,4}{1,2} - \alpha_Y + 0,1033 - \alpha_Y = 0 ; \quad \alpha_Y = -0,018$$

$$\alpha_X = 0,1212 ; \quad \alpha_Z = 0,1213$$

$$\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0,1212 \\ -0,018 \\ 0,1213 \end{Bmatrix} [rad/s^2]$$

Ondorioak

Mugimendu absolutuaren abiaduren eta azelerazioen eremua planteatuz ebatzi behar den mugimendu orokorraren azterketa burutu da.

Ariketa hau ebazterakoan ezezagun kopurua, ekuazio kopurua baino handiagoa da bai abiaduren eta bai azelerazioen kasuan eta horretan datza hain zuzen ere ariketaren zailtasuna. Dena den ikusi den bezala, abiadura edo azelerazio angeluarren osagai ez den ezezagun bat isolatu daiteke. Abiadura eta azelerazio angeluarrak, A eta B puntuetako mugimenduen menpe ez daudenez, A eta B puntuetako abiaduretatik abiatuta ezin izango dira kalkulatu; konprobatu barrak bere ardatzaren inguruan aske biratu dezakeela “3. Bideoa: biraketen gainezarpena” izeneko bideoan.