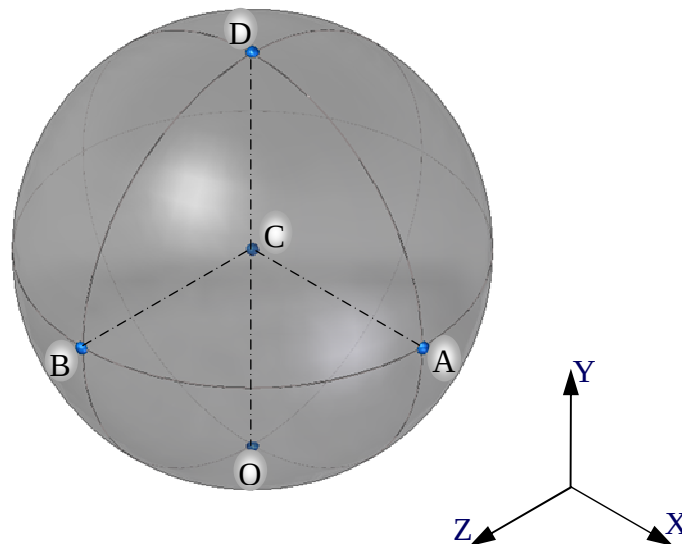


Enuntziatua

0,218 metrotako diametroa duen bola bat XZ plano horizontalaren gainetik labaindu gabe errodarazten da. Marraztutako aldiunean O puntua lurrean dago eta A eta D puntuetako abiadurak $\vec{v}_A = 4,8\vec{i} - 4,8\vec{j} + 3,6\vec{k} [m/s]$ eta $\vec{v}_D = 9,6\vec{i} + 7,2\vec{k} [m/s]$ dira. Hurrengoak lortu:

- Bolaren abiadura angeluarra.
- Bolaren zentroko C puntuko abiadura.



1go Irudia

Ebazpena

Bolak errodatzen du, hau da, biratzen du baina ez da abiadura uniformearekin transladatzen. Hala ere solidoan ezin da puntu finkorik topatu eta biraketa ardatza ez da konstantea izango. Hau aztertu ondoren, translazio edo errotazio hutsezko kasuak baztertu eta mugimendu orokor baten aurrean gaudela ondorioztatu daiteke.

Hasteko, kasu honetan, errodadura labainketarik gabe gertatzen da eta beraz ukipen puntuetako abiadurak berdinak izango dira; hau da, bolako O puntuko abiadura eta planoko O puntuko abiadurak berdinak dira eta beraz, plano finkoa bada, $\vec{v}_O = 0$ izango da.

O, A eta D puntuetako abiadurak ezagutzen direnez, bi ekuazio bektorial planteatu daitezke, horietatik 4 ekuazio eskalar independente lortuz eta bolaren abiadura angeluarra kalkulatzuz.

- Hasteko O eta D puntuetako abiadura eremua planteatzen da. Bi puntu hauek aukeratzen dira, kalkuluak errazteko asmoarekin.

$$O \text{ eta } D \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OD}$$

$$\begin{pmatrix} 9,6 \\ 0 \\ 7,2 \end{pmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0,218 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{i} \rightarrow 9,6 = -0,218\omega_z \\ \vec{j} \rightarrow 0 = 0 \\ \vec{k} \rightarrow 7,2 = 0,218\omega_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_z = -44,04 \\ \omega_x = 33,03 \end{cases}$$

Hirugarren osagaia lortzeko, ω_y eta O eta A puntuetako abiadurak erabiliz, abiaduren eremua planteatzen da.

$$O \text{ eta } A \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\begin{pmatrix} 4,8 \\ -4,8 \\ 3,6 \end{pmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 33,03 & \omega_y & -44,04 \\ 0,109 & 0,109 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{i} \rightarrow 4,8 = 4,8 \\ \vec{j} \rightarrow -4,8 = -4,8 \\ \vec{k} \rightarrow 3,6 = 3,6 - 0,109\omega_y \end{cases} \Rightarrow \omega_y = 0;$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 33,03 \\ 0 \\ -44,04 \end{pmatrix} [rad/s]$$

b) Solidoko abiadura angeluarra eta puntu batetako abiadura ezagutuz, solidoko beste edozein puntuko abiadura kalkulatu daiteke. Kasu honetan, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_O$ eta $\vec{v}_D$ ezagutzen dira, beraz C puntuko abiadura, aurreko beste edozein abiadurarekin erlazionatuz planteatu daiteke:

$$A \text{ eta } C \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$$

$$O \text{ eta } C \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}$$

$$D \text{ eta } C \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DC}$$

Bigarren ekuazioa aukeratzen da, kalkuluak errazagoak direlako.

$$\vec{v}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 33,03 & 0 & -44,04 \\ 0 & 0,109 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}_C = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 3,6 \end{pmatrix} [m/s]$$

Ondorioak

Mugimendu orokorra duen solido zurrun baten kasuan, hiru puntuetako (A, D eta O) abiadurak ezagunak izanda solidoaren abiadura angeluarra ezagutu nahi da, bere osagaiak definituz.

Hiru puntuetako abiadurak ezagutuz, hiru ekuazio bektorial planteatu daitezke.

$$A \text{ eta } D \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DA}$$

$$A \text{ eta } O \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$D \text{ eta } O \text{ puntuak} \in \text{bola} \quad \vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OD}$$

Bi ekuazio bakarrik behar dira, 4 ezezagun kalkulatu ahal izateko; bigarren eta hirugarren ekuazioetan O puntuarekin lan egiten da eta bere abiadura nulua denez, kalkuluak erraztuko dira, beraz bi ekuazio horiek aukeratzen dira.

O puntuko abiadura nulua dela ez da enuntziatuan zuzenean irakurtzen den datu bat, errodaduraren lehenengo baldintzatik ateratzen den ondorio bat, baizik. Hau da, bi gorputzen artean labainketa ez badago, errodadura hutsa egotekotan, elkar ukitzen duten bi gainazalen arteko abiadura erlatiboa nulua da.

Ariketa honetan ez da azelerazioen kalkulua eskatzen, baina azelerazioak planteatu nahi izatekotan, errodadurari dagokion bigarren baldintza kontutan hartu beharko zen; elkar ukitzen duten bi puntuetako azelerazioen proiektzioak, ukipen gainazalei ukitzailea den zuzenaren norabidean, berdina direla, baieztatzen duena.

