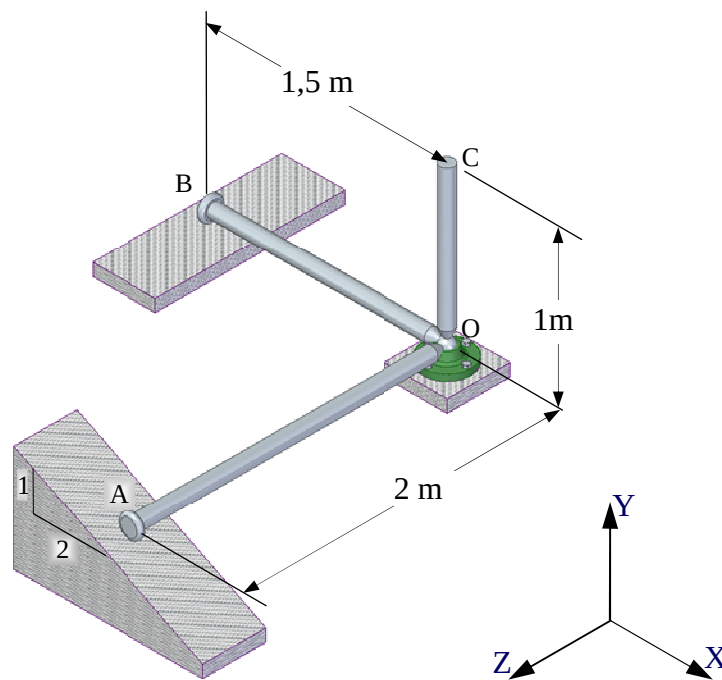


Enuntziatua

Irudiko pieza, haien artean soldatuak eta errotula baten bidez lotuak dauden hiru barren bidez sortu da. OA muturra XY planoari elkarzuta den plano inklinatuaren gainetik mugitzen den bitartean, OB muturra plano horizontalaren gainetik mugitzen da. Irudikaturiko aldiunean $\vec{v}_B = 15\vec{k} \text{ m/s}$, dela jakinda, hurrengoak lortu:

- Piezaren abiadura angeluarra eta C puntuko abiadura.
- B puntuko zeleritatea konstantea dela jakinda, piezaren azelerazio angeluarra eta C puntuko azelerazioa marraztutako aldiunean.



1go Irudia

Ebazpena

Abiapuntutzat piezaren mugimendua definitzen da.

Hasieratik, mugitzerakoan OB barrak bere orientazioa aldatzen duela ikusten da eta teoriarako 3.2 atalean ikasitakoa gogoratu... *Solido zurrun bat translazio hutsarekin mugituko da, solidoan definituriko edozein zuzen bere norabidea mantentzen duenean...* translaziozko mugimendua ez dela izango ondorioztatu daiteke.

Bestalde, teoriarako 3.3. atalean hurrengoak baieztatzen da, *solido zurrun batek errotazio hutsa dauka, bere puntu guztiek errotazio ardatzeko puntuen inguruan ibilbide zirkularrak jarraituz mugitzen direnean*. A eta B puntuek, O puntuan zentroa daukaten ibilbide zirkularrak definitzen dituzte, baina zirkunferentzia horiek ez dira zentrukideak, beraz ez da errotazio hutsezko mugimendua izango.

Oinarrizko mugimenduen ezaugarriak ez dira betetzen, beste era batera esanda, translazio edo errotazio hutsa ez denez, mugimendu orokor bat aztertzen gaude. Mugimendu orokor baten

abiadura eta azelerazioak, haien eremuei buruz azaldutakoa aplikatuz aztertzen dira (ikusi teoriako 3.6.atala), solidokoak diren bi puntuen arteko abiaduren eta azelerazioen arteko erlazioak planteatzen direlarik. Hurrengo erlazioak betetzen dira:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \quad \text{abiaduretarako}$$

$$\text{eta } \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \quad \text{azelerazioetarako}$$

Ekuazio horien bidez, mugimendu orokorra hurrengo eran interpretatu daiteke: A eta B puntuak emanda, solidokoa den A puntuko mugimendua bitan deskonposatu dezakegu, B puntuak duen translazioa eta B puntuaren inguruko errotazioa gehituz lortu daitekeelarik. Hurrengo bete behar da:

A eta B puntuak solido berdinekoak izan behar dute

$\vec{\omega}$ solidoko abiadura angeluar absolutua da, solidoko orientazio ezberdin guztiak kontutan hartzen duelarik

Aurrekoa edozein bi puntuei aplikatu ahal zaienez, logikoki, datu ezagunak dituzten puntuetako abiadura edota azelerazioak erlazionatuko dira.

Kasu honetan O puntua finkoa denez, bere abiadura eta azelerazioa ezagutzen dira, biak nuluak izanik, eta honek kalkuluak errazten ditu. Solidoak puntu finko bat izatekotan, puntu hori erabiltzea interesgarria izaten da.

a) Piezaren abiadura angeluarra eta C puntuko abiadura.

Hurrengo datuak ezagutzen dira:

O puntuko abiaduraren modulua eta norabidea, $\vec{v}_O = 0$

B puntuko abiaduraren modulua eta norabidea $\vec{v}_B = 15\vec{k} \text{ m/s}$

A puntuko abiaduraren norabidea: A puntua plano inklinatuan dagoen zirkunferentzia bat jarraituz mugitzen da eta beraz bere abiadura plano horretan egongo da, OA erradioari elkarzuta izango delarik $\rightarrow v_{Az} = 0$. Era berean, B puntua, Z ardatzaren norantza positiborantz mugitzen bada, A puntuak plano inklinatutik jaitsi beharko du. Irudian plano inklinatuak horizontalarekin duen angelua ikusi daiteke; plano horretako bektore batentzat X osagaiaren balioa Y osagaiaren balioaren bikoitza izango da. Guzti hau bektorialki adieraziz:

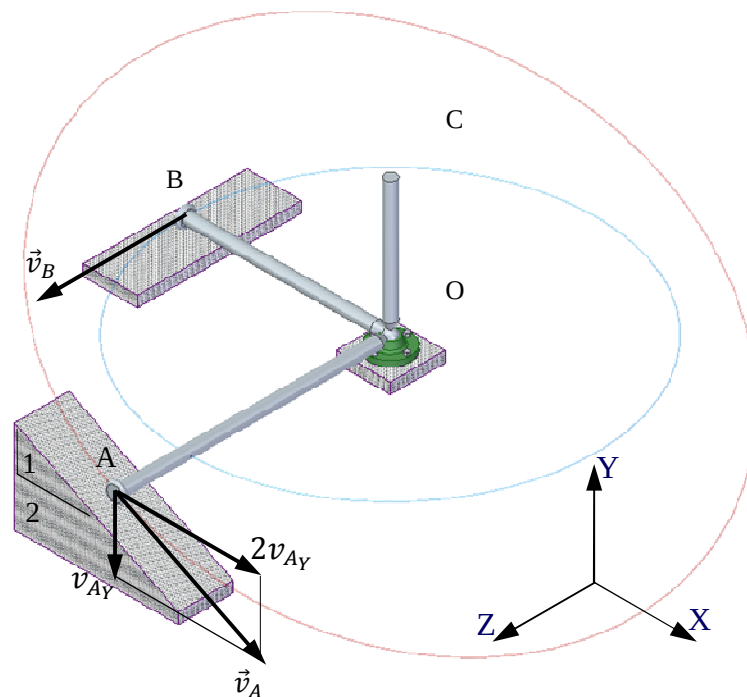
$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 2v_{Ay} \\ -v_{Ay} \\ 0 \end{Bmatrix} [\text{m/s}]$$

Ezezagunak:

A puntuko abiaduraren modulua

Abiadura angeluarraren modulua eta norabidea, hau da abiadura angeluarraren hiru osagaiak.

Bigarren irudian A eta B puntuetako ibilbideak marraztu dira eta abiadurak ibilbideei ukitzailak direla ikus daiteke.



2. irudia

O eta B puntuak erlazionatuz abiaduren eremua planteatzen da.

O eta B puntuak solido berdinekoak direnez $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ -1,5 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{i} \rightarrow 0 = 0 \\ \vec{j} \rightarrow 0 = -1,5\omega_Z \\ \vec{k} \rightarrow 15 = 1,5\omega_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_Z = 0 \\ \omega_Y = 10 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Hiru dimentsioetarako lorturiko ekuazio bektorialetik abiatuta hiru ekuazio eskalar planteatu daitezke, baina bakarrik bi ezezagun ebatzi daitezke. Hau, hiru ekuazioak linealki menpekoak direlako gertatzen da.

Falta den ω_X osagaia lortzeko beste ekuazio bektorial bat planteatzea beharrezkoa izango da. Ondoren O eta A puntuetarako abiaduren eremua planteatzen da, ekuazio honetan abiadura angeluarraren bi osagai jadanik ezagunak direla kontutan izanda.

O eta A solido berdinekoak direnez, $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$

$$\begin{Bmatrix} 2v_{A_Y} \\ -v_{A_Y} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_X & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{i} \rightarrow 2v_{A_Y} = 20 \\ \vec{j} \rightarrow -v_{A_Y} = -2\omega_X \\ \vec{k} \rightarrow 0 = 0 \end{cases} \quad ; \rightarrow \quad \begin{matrix} v_{A_Y} = 10 \frac{m}{s} \\ \omega_X = 5 \text{ rad/s} \end{matrix}$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s] ; \quad \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} [rad/s]$$

Solidoko abiadura angeluarra eta puntu batetako abiadura ezagutuz gero, solidoko beste edozein puntutako abiadura kalkulatu daiteke. C puntuko abiadura kalkulatzeko A, B edo O puntuetako abiadurak erabili daitezke, errazena C puntukoa erabiltzea delarik.

O eta C puntuak erlazionatuz abiaduren eremua planteatzen da.

$$\text{O eta C puntuak solidoko berdinekoak direnez, } \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{v}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} [m/s]$$

b) B puntuko zeleritatea konstantea dela jakinda, piezaren azelerazio angeluarra eta C puntuko azelerazioa marraztutako aldiunean.

Azelerazioen kalkulurako prozedura antzekoa da.

Hurrengo datuak ezagutzen dira:

O puntuko abiadura eta azelerazioa; O puntu finkoa denez, $\vec{a}_O = 0$

B puntuko zeleritatea konstantea denez, bere azelerazio tangentiala nulua da, beraz, $\vec{a}_B^T = 0$.

Azelerazio normala kurbatura zentrorantz zuzenduta dago bere modulua $a_B^N = \frac{v_B^2}{OB}$ delarik

$$\rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_B^T + \vec{a}_B^N = 0 + \frac{v_B^2}{OB} \vec{i} = \frac{15^2}{1,5} \vec{i} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A puntuko azelerazio tangentialaren eta abiaduraren norabideak berdinak dira, biak ibilbideari ukitzaile izanik, hau da, $a_A^T = 0$; bestelalde, X eta Y koordenatuen artean

$$\text{proportzionaltasun berdina dago, beraz, } \vec{a}_A^T = \begin{Bmatrix} 2a_{A_Y}^T \\ -a_{A_Y}^T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Azelerazio normala kurbatura zentrorantz zuzenduta dago, bere modulua $a_A^N = \frac{v_A^2}{OA}$ delarik

$$\rightarrow \vec{a}_A^N = -\frac{v_A^2}{OA} \vec{k} = -\frac{(10\sqrt{5})^2}{2} \vec{k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_A^T + \vec{a}_A^N = \begin{Bmatrix} 2a_{Ay}^T \\ -a_{Ay}^T \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2a_{Ay}^T \\ -a_{Ay}^T \\ -250 \end{Bmatrix}$$

Ezezagunak:

A puntuko azelerazio tangentialaren modulua.

Azelerazio angeluarraren modulua eta norabidea, hau da azelerazio angeluarraren hiru osagaiak.

O eta B puntuak piezakoak direla kontutan hartuz, azelerazioen eremua planteatu daiteke, bi puntu horietako azelerazioak erlazionatuz:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}) = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_B$$

$$\begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ -1,5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{i} \rightarrow 150 = 150 \\ \vec{j} \rightarrow 0 = -1,5\alpha_z - 75 \\ \vec{k} \rightarrow 0 = 1,5\alpha_y \end{cases};$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_z = -5 \\ \alpha_y = 0 \end{cases}$$

Azelerazio angeluarraren α_x osagaiak lortzeko azelerazioen eremua planteatzen da, O eta A puntuak piezakoak direla kontutan hartuz eta haien azelerazioak erlazionatuz:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A$$

$$\begin{Bmatrix} 2a_{Ay}^T \\ -a_{Ay}^T \\ -250 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_x & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 20 & -10 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} \vec{i} \rightarrow 2a_{Ay}^T = 0 \\ \vec{j} \rightarrow -a_{Ay}^T = -2\alpha_x \\ \vec{k} \rightarrow -250 = -250 \end{cases};$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_{Ay}^T = 0 \\ \alpha_x = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{Bmatrix} [m/s]; \quad \vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} [rad/s]$$

O eta C puntuak erlazionatuz azelerazioen eremua planteatzen da, C puntuko azelerazioa kalkulatzeko.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OC} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}) = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{a}_c = \begin{pmatrix} 55 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ondorioa

Ariketa honetan abiadura eta azelerazio angeluar ezezaguna duen solido zurrun batetako mugimendu orokorra planteatzen da, solidoko A, O eta B puntuetako abiaduren eta azelerazioen inguruko zenbait datu ezagutzen direlarik.

Mugimendu orokorrari dagokion abiaduren eremuaren bidez, solidokoak diren puntu bikote batentzat, kasu honetan O eta B puntuentzat, ekuazio bektorial bat lortu daiteke, espazio tridimentsionalean. Ekuazio bektorialetik abiatuta, hiru ekuazio eskalar lortzen dira, ω_z eta ω_y ezezagunak ebatziko direlarik. Solidoko beste bi puntu erlazionatuz, O eta A puntuak oraingoan, abiaduren eremuko adierazpena berriz planteatzea beharrezko da, beste bi ezezagun, ω_x eta v_{Ay} , ebatziz.

Azelerazioen kasuan, prozedura antzekoa da, mugimendu orokorraren azelerazioen eremuko adierazpenak erabiltzerakoan, azelerazioaren osagai normala eta tangenziala kontutan hartu behar direla gogoratu.



2016 OCW
OpenCourseWare