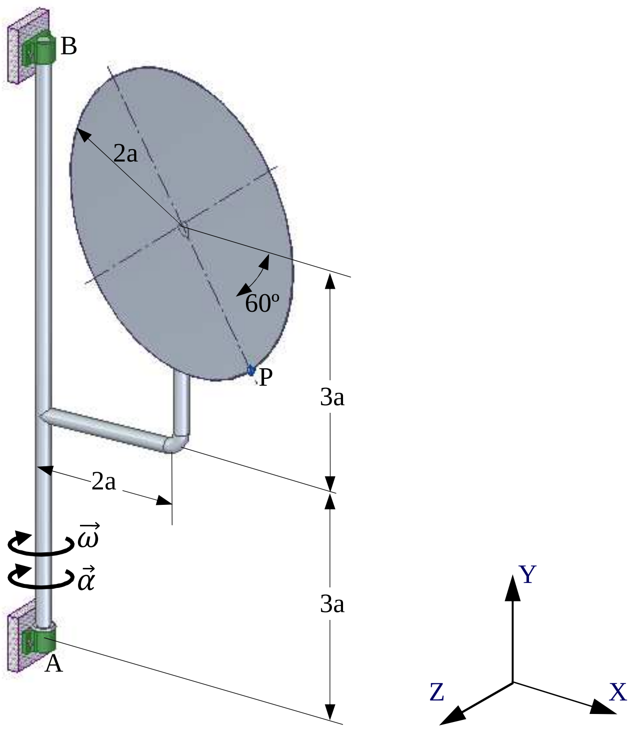
Enuntziatua

Irudiko diskoak AB ardatzari soldatuta dagoen barrarekin batera biratzen du. Sistemak, AB ardatzaren inguruan biratzen du, abiadura angeluarra ω rad/s eta azelerazio angeluarra α rad/s^2 direlarik. P puntuko abiadura eta azelerazioa kalkulatu.



Ebazpena

P puntuko abiadura eta azelerazioa kalkulatzeko hurrengoa jakin behar da:

a) puntua zein solidotakoa den.

b) solido horrek duen mugimendu mota.

a) Bideoan ikus daitekeenez, ardatza, barra eta diskoa soldatuak daude, solido bakar bat definituz, P puntua solido horretakoa izango delarik. Hemendik aurrera solido hori, ardatza-barra-disko sistema izendatuko da, P puntua solido horren barne egongo delarik..

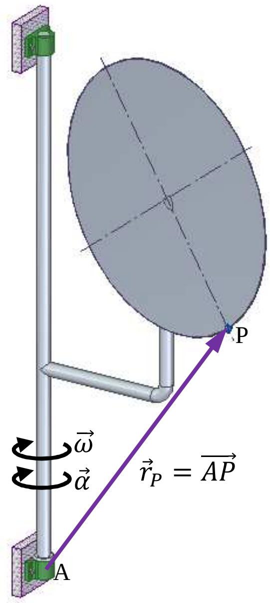
b) *solido zurrun batek errotazio hutsezko mugimendua burutuko du, solidoko puntu guztiek ibilbide zirkularra definitzen dutenean, zirkunferentzia guzti horien zentroek errotazio ardatza izeneko zuzena definituko dutelarik.*

Kasu honetan solidoko puntu guztiak ibilbide zirkularrak definitzen dituzte, ibilbide guzti horien zentroa AB zuzenean egongo delarik. (ikusi bideoan P puntuko ibilbidea). Beraz, solidoak, AB ardatzaren inguruko errotazio hutsa izango du, abiadura eta azelerazio angeluarra ezagunak izanda.

Hemendik aurrera ebazpenerako era ezberdinak proposatzen dira, teoriazko 3.3. atalean agertzen diren adierazpen ezberdinak erabiliz.

1go ebazpena

Kalkulu bektoriala, A puntuan jatorria duen posizio bektorea erabiliz eta kota guztiak jatorri horrekiko definituz.



P puntuko abiadura hurrengo biderkadura bektoriala garatuz lortzen da (ikusi 27. adierazpena):

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$

non: $\vec{\omega}$: P puntua barne daukan solidoaren abiadura angeluarra den; kasu honetan Y ardatzaren norantza negatiboa dauka.

$\vec{r}_P$: P puntuaren kokapena errotazio ardatzarekiko definitzen duen bektorea den; jatorria ardatzeko edozein puntutan eduki behar du eta muturra P puntuan.

Posibleak diren aukera guztien artetik, jatorria A puntuan definituz $\rightarrow \vec{r}_P = \overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{Bmatrix} 2a + 2\,a\cos 60° \\ 6a - 2a sen 60° \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3a \\ 6a - \sqrt{3}a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 3a & 6a - \sqrt{3}a & 0 \end{vmatrix} \; ; \qquad \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\omega \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]}$$

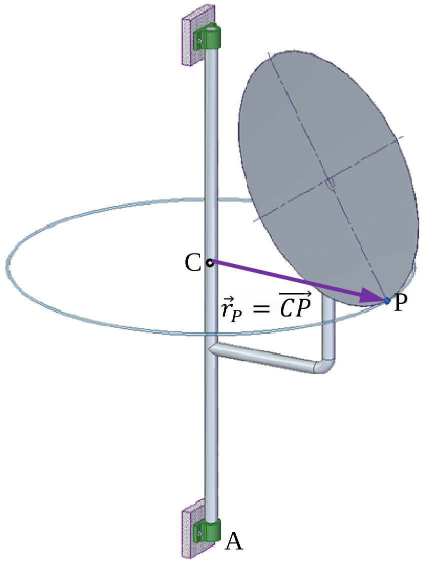
P puntuko azelerazioa, azelerazio tangentziala eta normala batuz lor daiteke (ikusi 28. adierazpena):

$$\vec{a}_P = \overbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P}^{a_{tangentziala}} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P)}^{a_{normala}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 3a & 6a - \sqrt{3}a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 3a\omega \end{vmatrix}$$

Garapenaren puntu honetan $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})$ biderkadura bektoriala aurretik kalkulatuta dagoela konprobatu daiteke eta bere balioa $\vec{v}_P$-ren balioarekin batera dator.

$$\boxed{\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]}$$



2. ebazpena Kalkulu bektoriala, jatorria ibilbidearen kurbatura zentroan duen bektore posizio bat erabiliz.

Lehenago aipatu den bezala, posizio bektorearen jatorritzat ardatzeko edozein puntu definitu daiteke; horregatik kasu honetan, P puntuaren ibilbidearen kurbatura zentroa aukeratzen da jatorritzat, hau da, C puntutik abiatzen den eta P puntura heltzen den bektore posizioa definitzen da. Horrela, → $\vec{r}_P = \overrightarrow{CP}$.

$$\overrightarrow{CP} = \begin{Bmatrix} 2a + 2\,a\cos 60° \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \overrightarrow{CP} = \begin{Bmatrix} 3a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 3a & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\omega \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]$$

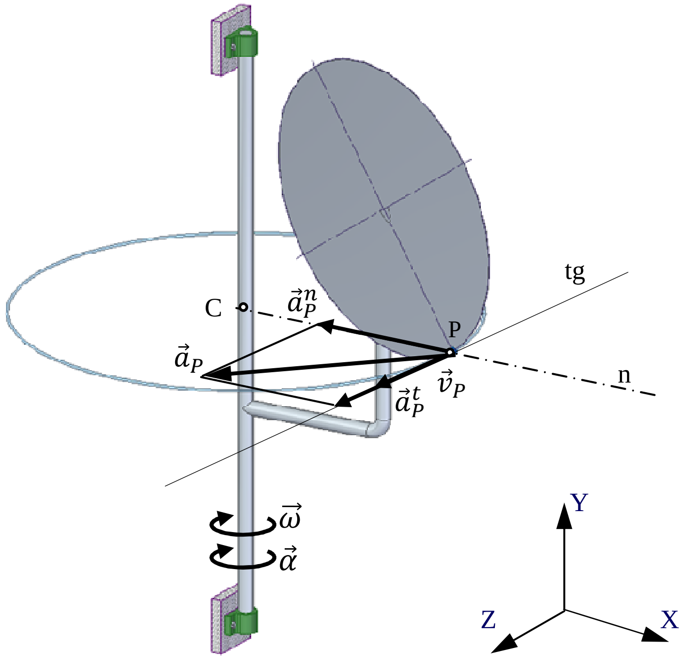
$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 3a & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 3a\omega \end{vmatrix}; \quad \vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]$$

Ibilbidearen kurbatura zentroa, hau da C puntua, ezaguna bada, biderkadura bektorial bikoitza $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP})$ garatu ordez, azelerazio normala kalkulatzeko $\omega^2 \cdot R$ biderkadura erabili daiteke. Norabidea eta norantza definitzeko, zirkunferentziaren zentrorantz zuzenduta dagoela kontutan hartu behar da, hau da, $\overrightarrow{CP}$ bektorearen norabide berdina baina kontrako norantzan.

$$\vec{a}_P^n = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{CP} = -\omega^2 \cdot \begin{Bmatrix} 3a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Adierazpen grafikoa Hurrengo irudian abiadura eta azelerazio bektoreak marraztu dira eta hurrengo norabideak konprobatu daitezke:

- P puntuko abiadura eta azelerazio tangentzialak ibilbideari ukitzaileak dira.
- P puntuko azelerazio normala, ibilbideari normala da, kurbatura zentrorantz.



P puntuko abiaduraren eta azelerazioaren adierazpen grafikoa

3. Era

Kalkulu eskalarra, abiadura eta azelerazio bektoreen definizioa erabiliz, hau da, bere modulua, norabidea eta norantza definituz.

P puntuko abiadura:

- Modulua: $v_P = R \cdot \omega$, non R ibilbideari dagokion zirkunferentziaren erradioa den,

$$v_P = R \cdot \omega = 3a \cdot \omega$$

- Norabidea: ibilbidearen zirkunferentziari ukitzaile, Z ardatzaren norabidea ($\vec{k}$ osagaia)
- Norantza: mugimenduarena, Z ardatzaren norantza positiboan (+)

$$\vec{v}_P = 3a\omega\,\vec{k} \quad ; \quad \vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\omega \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]$$

P puntuko azelerazio tangentziala:

- Modulua: $a_P^t = R \cdot \alpha$
- Norabidea: abiadurarentzat definitutakoa, biak ibilbideari ukitzaileak dira ($\vec{k}$ osagaia)
- Norantza: mugimenduarena, Z ardatzaren norantza positiboan (+)

$$\vec{a}_P^t = 3a\alpha\,\vec{k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

P puntuko azelerazio normala:

- Modulua:

$$\vec{a}_P^n = \omega^2 \cdot R = 3a\omega^2 [m/s^2]$$

- Norabidea eta norantza: ibilbidearen kurbatura zentrorantz X ardatzaren norantza negatiboan $(-)$.

$$\vec{a}_P^n = -3a\omega^2 \vec{\imath} = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Beraz azelerazio totala:

$$\boldsymbol{\vec{a}_P = \vec{a}_P^t + \vec{a}_P^n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}} \; ; \; \boldsymbol{\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

Ondorioak

Kasu honetan ariketa hiru era ezberdinetan ebatzi da:

Lehenengo kasuaren gakoa aztertutako puntuaren posizioa ezagutzeaz gain, errotazio ardatzeko beste edozein puntuko posizioa ezagutzean datza. Hau beti gertatuko da.

Bigarren eta hirugarren kasuetan, ordea, jatorritzat, ibilbidearen kurbatura zentroa erabili da. Zenbait kasutan puntu hori ez da begi bistakoa eta beraz ebazpen prozedura hauek ez dira horren egokiak izango.