2. Gaia
Laplace-ren transformatua

2 Gaia
Laplace-ren transformatua

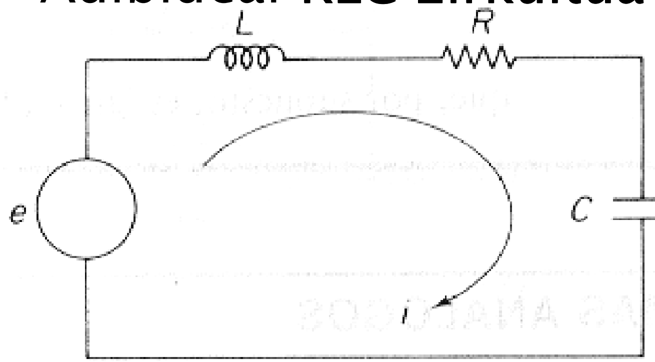
1. Sarrera
2. Laplaceren transformatua. Definizioa, propietateak.
3. Funtzio batzuen kalkulua
4. Laplaceren alderantzizko transformatua
5. Ekuazio diferentzialen ebazpena (LTI sistemak)

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Sarrera

Zertarako erabili Laplace-ren transformatua?
*Koefiziente konstantedun **ekuazio diferentzial** linealak ebazteko*

Baina, zertarako behar dugu ekuazio diferentzialak ebaztea?
***Sistema fisikoek** (elektrikoak, mekanikoak, elektronikoak, termikoak..) adierazi daitezke modu sinple baten ekuazio diferentzial linealen bidez. Hau da, sistemak euren **eredu matematikoaren** bitartez adieraz daitezke eta modu teoriko baten aurreikusi zein izango den sistemen bilakaera sarrera desberdinen aurrean (sarrera konstanteak, aldakorrak denboran eta abar …).*

Adibidea: RLC zirkuitua



Kirchhoff-en legeak aplikatuz

$$\sum V = 0$$

$$\underbrace{L\frac{d\,i(t)}{dt}}_{V_L} + \underbrace{R\,i(t)}_{V_R} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(t)\,dt}_{V_C} = e(t)$$

Ekuazio diferentzial lineala koefiziente konstantedunekin

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Sarrera

Laplace-ren transformatuaren abantailak:

1) Ekuazio diferentzialetan agertzen diren deribatu eta integralak eragiketa aljebraikoetan ordezkatzen dira. Beraz, sistema fisikoak adierazten dituzten ekuazio diferentzialak ebazteko modu erraza da, ekuazio aljebraikoetan bihurtuta.

2) Metodo grafikoen bitartez sistemaren funtzionamendua aurreikustea ahalbidetzen du, ekuazio diferentzialak ebatzi beharrean.

3) Sistemaren ekuazioak ebatzi eta gero irteeraren erregimen iragankorra eta iraunkorra lortzen da.

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Definizioa, propietateak

Laplace-ren transformatua

$$L(f(t))$$

$$\boxed{L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t} dt}$$

Laplace-ren alderantzizko transformatua

$$L^{-1}(F(s))$$

$$\Rightarrow \boxed{L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi\, i} \int F(s)\, e^{s\,t} ds}$$

Oharra: L.T. existitzen da funtzioa integragarria denean

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Definizioa, propietateak

PROPIETATEAK

Linealtasuna $\Rightarrow$ $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Rightarrow F(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

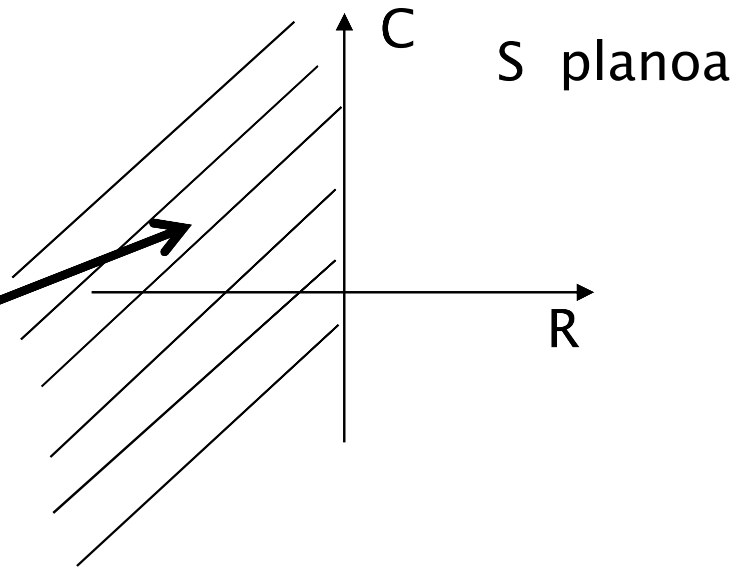
Diferentziazioa

$$F\left(\frac{d(f(t))}{dt}\right) = s\,F(s) - f(0)$$

$$F\left(\frac{d^2(f(t))}{dt^2}\right) = s^2\,F(s) - s\,f(0) - f'(0)$$

Integrazioa $\Rightarrow$ $F\left(\int f(t)dt\right) = \dfrac{F(s)}{s}$

TEOREMAK



Azken balioaren teorema:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \underbrace{s\,F(s)}_{\text{Poloak } <0}$$

Hasierako balioaren teorema:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)$$

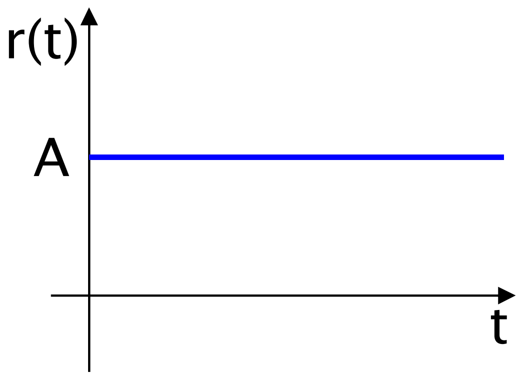
Denborazko translazioa:

f(t)=0 bada *t*<0 denean, L.T. denboran atzeratutako funtzio batentzat a≥0:

$$L\left[f\left(t-a\right)\right] = e^{-as} F\left(s\right)$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Funtzio batzuen kalkulua

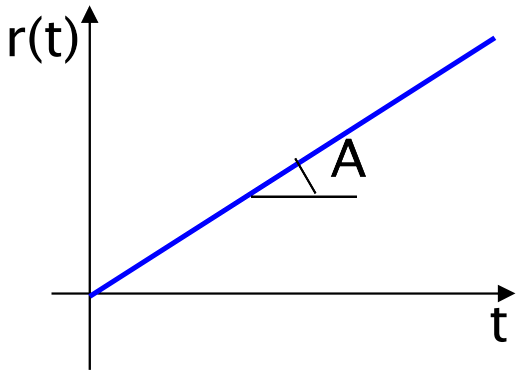
Maila Funtzioa r(t)=A



$$L(r(t)) = \int_0^\infty A\, e^{-s\,t} dt = \boxed{\frac{A}{s}}$$

A= 1 bada **maila unitatea** deitzen da **r(t)=1(t)**

Malda funtzioa r(t)=A t



$$L(r(t)) = \int_0^\infty At\, e^{-s\,t} dt = \boxed{\frac{A}{s^2}}$$

A malda izanik

A= 1 bada **malda unitarioa** deitzen da

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Funtzio batzuen kalkulua

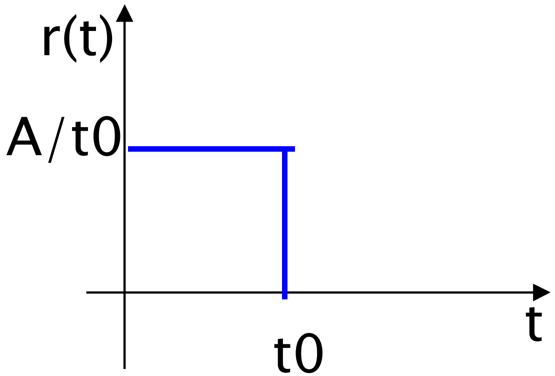
Funtzio esponentziala:

Demagun ondoko funtzioa , $f(t) = Ae^{-at}\ t \geq 0 \qquad f(t) = 0,\ t < 0$

$$L\left[Ae^{-at}\right] = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt = \frac{A}{-(s+a)}e^{-(a+s)t}\Big|_0^\infty = \frac{A}{-(s+a)}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = \frac{A}{s+a}$$

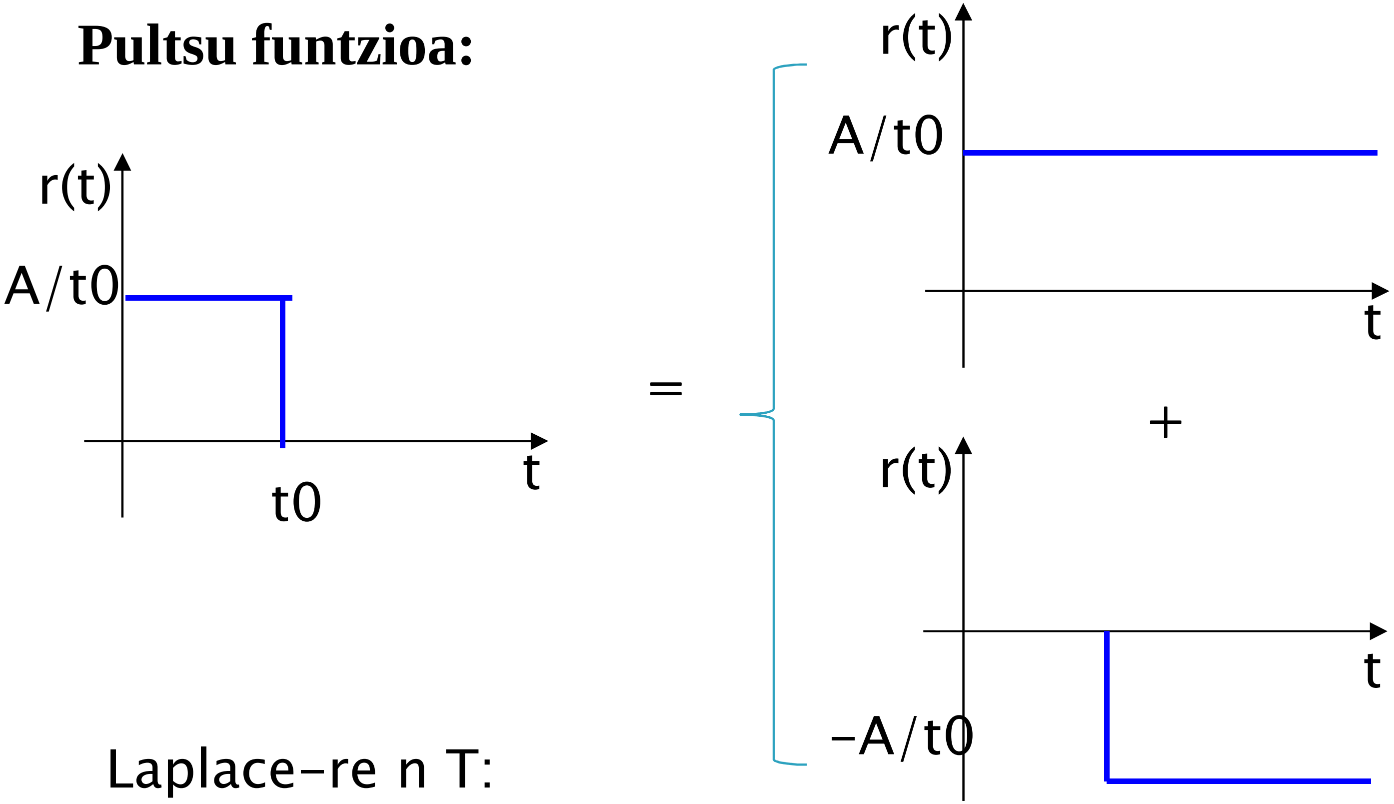
Pultsu funtzioa:

Demagun ondoko funtzioa , $f(t) = \frac{A}{t_0},\ 0 < t < t_0 \quad f(t) = 0,\ t < 0,\ t > t_0$



2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Funtzio batzuen kalkulua

Pultsu funtzioa:



$$f(t)=\frac{A}{t_0}1(t)-\frac{A}{t_0}1(t-t_0)$$

Laplace-re n T:

$$L[f(t)]=L\left[\frac{A}{t_0}1(t)\right]-L\left[\frac{A}{t_0}1(t-t_0)\right]=\boxed{\frac{A}{t_0 s}\left(1-e^{-st_0}\right)}$$

Denborako translazioa:

$$L[f(t-a)]=e^{-as}F(s)$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Funtzio batzuen kalkulua

Inpultsu funtzioa:

Pultsu funtzioaren limitea $f(t)=\lim_{t_0\to 0}\frac{A}{t_0},\ 0<t<t_0$ $\quad f(t)=0,\ t<0,\ t>t_0$

$$L[f(t)]=\lim_{t_0\to 0}\frac{A}{t_0 s}\left(1-e^{-st_0}\right)=\lim_{t_0\to 0}\frac{\frac{d}{dt_0}\left[A\left(1-e^{-st_0}\right)\right]}{\frac{d}{dt_0}\left(t_0 s\right)}=\frac{As}{s}=A$$

(L´Hôpital)

Inpultsoaren magnitudea bere azaleragatik neurtzen da (A/to altuera, t0 luzera)

A=1 denean inpultso unitatea edo Diracen delta deitzen da $L[\delta(t-t_0)]=1$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Funtzio batzuen kalkulua

Laplace transform pairs

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \quad (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
14	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
16	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Laplaceren alderantzizko transformatua

Orokorrean, Laplaceren transformatua sistemaren ekuazioetatik lortzen da eta alderantzizkoa taulen bitartez , beraz tauletan agertuko diren funtzio sinpleak izan behar dira.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s) \quad | \quad F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s)$$ alderanantzizko T. ezagunak dira

Orduan: $$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + \cdots + L^{-1}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$$

Tauletan agertzen ez den F(s) funtzio orokor baten deskonposaketa egiteko F(s) funtzio horren poloak (izendatzailearen erroak) nolakoak diren jakin behar da: **errealak, irudikariak, desberdinak** eta abar.

Laplaceren alderantzizko transformatua

1) Polo errealak eta desberdinak direnean:

F(s) ondoko moduan adierazten bada:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)},\quad m<n$$

$$\begin{cases} p_1, p_2, \ldots, p_n & \text{Poloak} \\ z_1, z_2, \ldots, z_m & \text{Zeroak} \end{cases}$$

zeroak diren, F(s) frakzio sinpleetan deskonposatu daiteke modu honetan:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_2)}+\ldots+\frac{a_n}{(s+p_n)},$$ non kte eta

$s=-p_k$ poloaren hondarra deitzen den. Honela lortzen delarik:

$$a_k=\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]\Bigg|_{s=-p_k}$$

Orduan $\boxed{f(t)=L^{-1}[F(s)]=a_1e^{-p_1t}+a_2e^{-p_2t}+\cdots+a_ne^{-p_nt}}$ t ≥ 0

Laplaceren alderantzizko transformatua

ADIBIDEA: $f(t) = L^{-1}[F(s)] = ????$ Jakinik $F(s) = \dfrac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

Frakzio sinpleetan : $F(s) = \dfrac{a_1}{(s+1)} + \dfrac{a_2}{(s+3)}$

non $a_1 = (s+1)\left.\dfrac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-1} = 1 \quad a_2 = (s+3)\left.\dfrac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-3} = \dfrac{1}{2}$

Beraz:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{1/2}{(s+3)}\right] = e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Laplaceren alderantzizko transformatua

2) Polo irudikariak direnean:

F(s) funtzioaren poloak irudikariak direnean , funtzioa deskonposatu behar da tauletan agertzen den moduan:

$$L\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad L\left[e^{-at}\cos\omega t\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Adibidea: *f(t)* funtzioa kalkulatu $f(t)=L^{-1}[F(s)]$, jakinik $F(s)=\dfrac{2s+12}{s^2+2s+5}$ dela.

F(s)ren poloak $p_{1,2}= -1+2j$ irudikariak

$$F(s)=\frac{2s+12}{(s+1+2j)(s+1-2j)}=\frac{2s+12}{(s+1)^2+2^2}=\frac{10+2(s+1)}{(s+1)^2+2^2}=5\frac{2}{(s+1)^2+2^2}+2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=5L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]+2L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right]=5e^{-t}\sin 2t+2e^{-t}\cos 2t$$

$$L\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad L\left[e^{-at}\cos\omega t\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Laplaceren alderantzizko transformatua

2) Polo anizkoitzak direnean:

Hurrengo adibidearen bitartez azalduko da: $F(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$

s=-1 puntuan polo hirukoitza dauka eta F(s) funtzioa modu honetan deskonposatzen da:

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{a_1}{(s+1)}+\frac{a_2}{(s+1)^2}+\frac{a_3}{(s+1)^3}$$

$$\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{a_1(s+1)^2+a_2(s+1)+a_3}{(s+1)^3}=\frac{a_1s^2+(2a_1+a_2)s+a_1+a_2+a_3}{(s+1)^3}\Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ 2a_1+a_2=2 \\ a_1+a_2+a_3=3 \end{cases}$$

Orduan

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right]+L^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right]=e^{-t}+0+t^2e^{-t}=(1+t^2)e^{-t}$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Ekuazio diferentzialen ebazpena

Laplaceren transformatuaren metodoaren bidez ekuazio diferentzial lineal eta konstanteen emaitza orokorra lortu daiteke

Urratsak:

1- Ekuazio diferentzialaren bere L.T. kalkulatzen da

2- Lortutako ekuazio aljebraikoa ebazten da.

3- Emaitzaren Laplace-ren alderantzizko transformatua kalkulatzen da

2 Gaia. Laplace-ren transformatua
Ekuazio diferentzialen ebazpena

Adibidea: Ebatzi ondoko ekuazio diferentziala $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 5$

Hasierako baldintzak $\dot{x}(0) = 2$ eta $x(0) = -1$

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = sL\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] - \dot{f}(0) = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$L\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x\right) = L(5)$$

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3\left(sX(s) - x(0)\right) + 2X(s) = \frac{5}{s}$$

$$X(s) = \frac{-s^2-s+5}{s(s^2+3s+2)} = \frac{-s^2-s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$$

$$x(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua