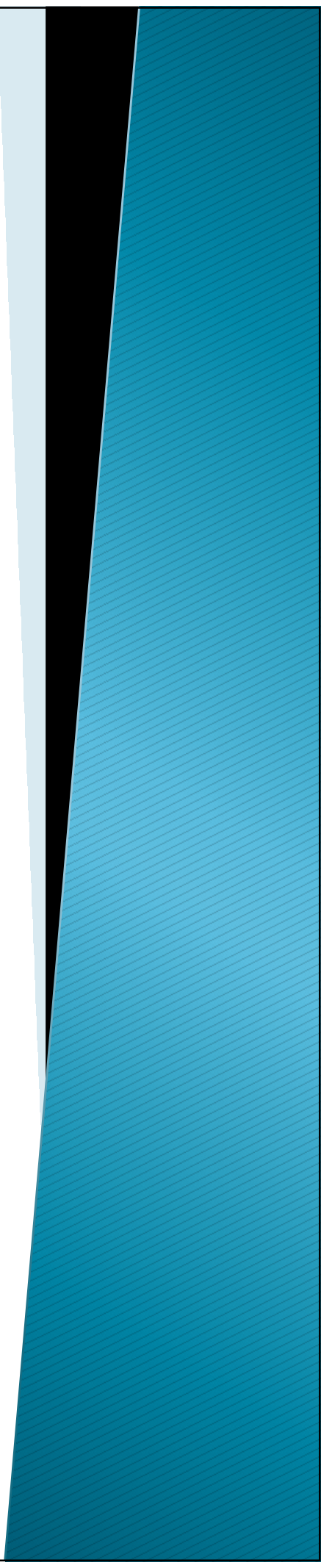


2. Gaia

Laplace-ren transformatua



2 Gaia

Laplace-ren transformatua

1. Sarrera
2. Laplaceren transformatua. Definizioa, propietateak.
3. Funtzio batzuen kalkulua
4. Laplaceren alderantzizko transformatua
5. Ekuazio diferentzialen ebazpena (LTI sistemak)

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Sarrera

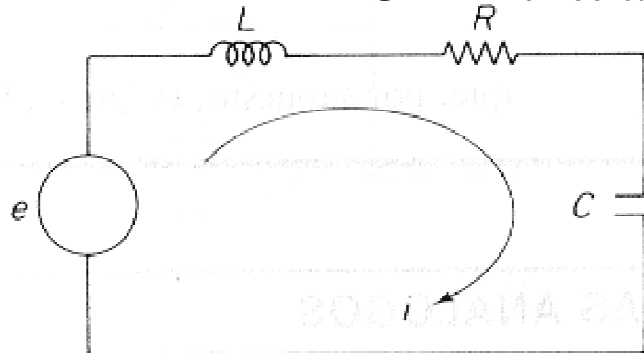
Zertarako erabili Laplace-ren transformatua?

Koefiziente konstantedun ekuazio diferentzial linealak ebazteko

Baina, zertarako behar dugu ekuazio diferentzialak ebaztea?

Sistema fisikoek (elektrikoak, mekanikoak, elektronikoak, termikoak..) adierazi daitezke modu sinple baten ekuazio diferentzial linealen bidez. Hau da, sistemak euren eredu matematikoaren bitartez adieraz daitezke eta modu teoriko baten aurreikusi zein izango den sistemen bilakaera sarrera desberdinen aurrean (sarrera konstanteak, aldakorak denboran eta abar ...).

Adibidea: RLC zirkuitua



Kirchhoff-en legeak aplikatuz

$$\sum V = 0$$

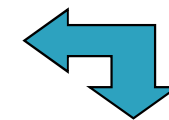
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$$

↓
 V_L

↓
 V_R

↓
 V_C

*Ekuazio diferentzial lineala
koefiziente konstantedunekin*



2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Sarrera

Laplace-ren transformatuaren abantailak:

- 1) Ekuazio diferentzialetan agertzen diren deribatu eta integralak eragiketa aljebraikoetan ordezkatzeko dira. Beraz, sistema fisikoak adierazten dituzten ekuazio diferentzialak ebazteko modu erraza da, ekuazio aljebraikoetan bihurtuta.
- 2) Metodo grafikoaren bitartez sistemaren funtzionamendua aurreikustea ahalbidetzen du, ekuazio diferentzialak ebatzi beharrean.
- 3) Sistemaren ekuazioak ebatzi eta gero irteeraren erregimen iragankorra eta iraunkorra lortzen da.

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Definizioa, propietateak

Laplace-ren transformatua

$$L(f(t))$$

Laplace-ren alderantzizko transformatua

$$L^{-1}(F(s))$$

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$\Rightarrow$

$$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int F(s) e^{st} ds$$

Oharra: L.T. existitzen da funtzioa integragarria denean

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Definizioa, propietateak

PROPIETATEAK

Linealtasuna $\Rightarrow f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Rightarrow F(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

Diferentziazioa $\left\{ \begin{array}{l} F\left(\frac{d(f(t))}{dt}\right) = s F(s) - f(0) \\ F\left(\frac{d^2(f(t))}{dt^2}\right) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \end{array} \right.$

Integrazioa $\Rightarrow F\left(\int f(t)dt\right) = \frac{F(s)}{s}$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

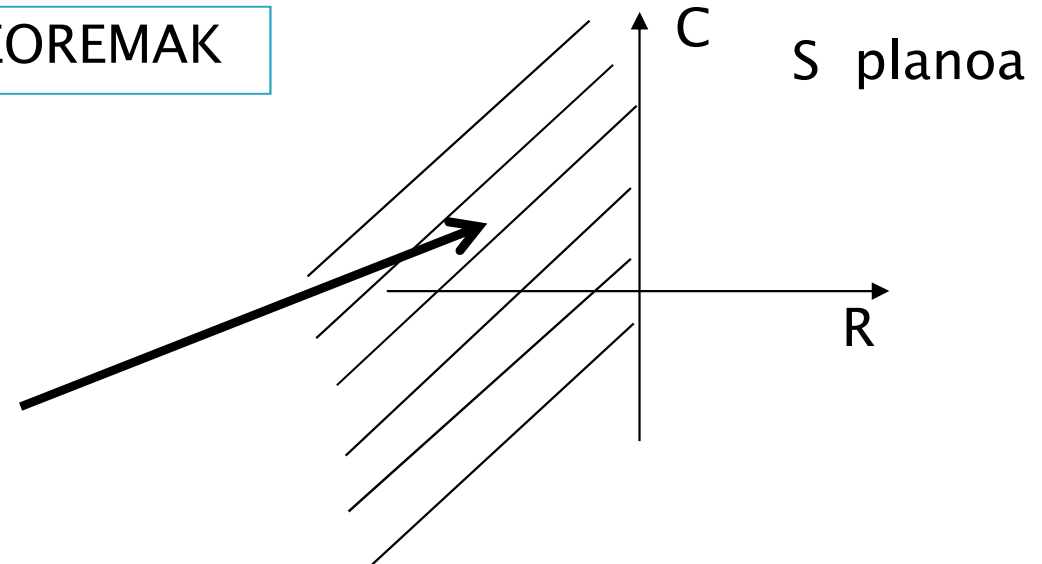
Definizioa, propietateak

TEOREMAK

Azken balioaren teorema:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Poloak < 0



Hasierako balioaren teorema:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Denborazko translazioa:

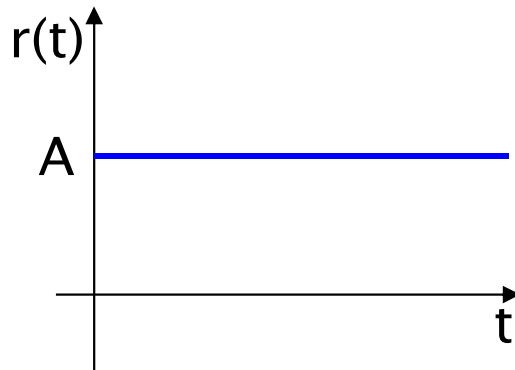
$f(t)=0$ bada $t < 0$ denean, L.T. denboran atzeratutako funtzio batentzat $a \geq 0$:

$$L[f(t - a)] = e^{-as} F(s)$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Funtzio batzuen kalkulua

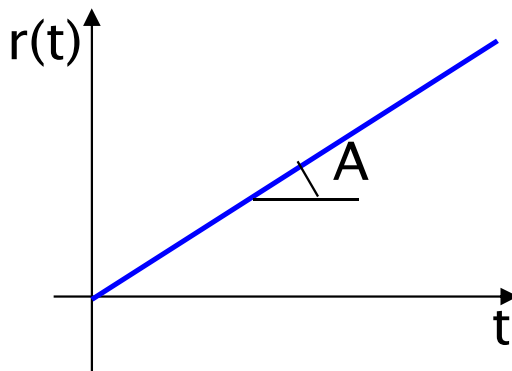
Maila Funtzioa $r(t)=A$



$$L(r(t)) = \int_0^{\infty} A e^{-s t} dt = \boxed{\frac{A}{s}}$$

$A=1$ bada maila unitatea deitzen da $r(t)=1(t)$

Malda funtzioa $r(t)=A t$



$$L(r(t)) = \int_0^{\infty} A t e^{-s t} dt = \boxed{\frac{A}{s^2}} \quad A \text{ malda izanik}$$

$A=1$ bada malda unitarioa deitzen da

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Funtzio batzuen kalkulua

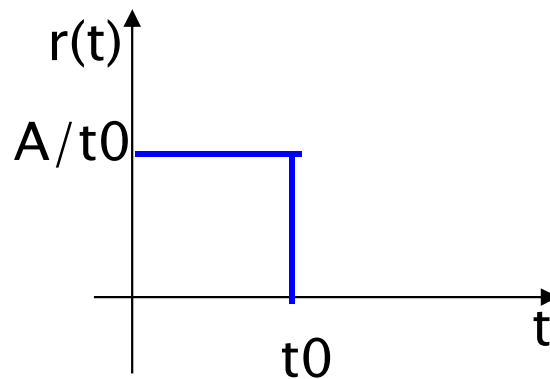
Funtzio esponentziala:

Demagun ondoko funtzioa , $f(t) = Ae^{-at} \quad t \geq 0 \quad f(t) = 0, \quad t < 0$

$$L[Ae^{-at}] = \int_0^{\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{A}{-(s+a)} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{-(s+a)} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} \right) = \frac{A}{s+a}$$

Pultsu funtzioa:

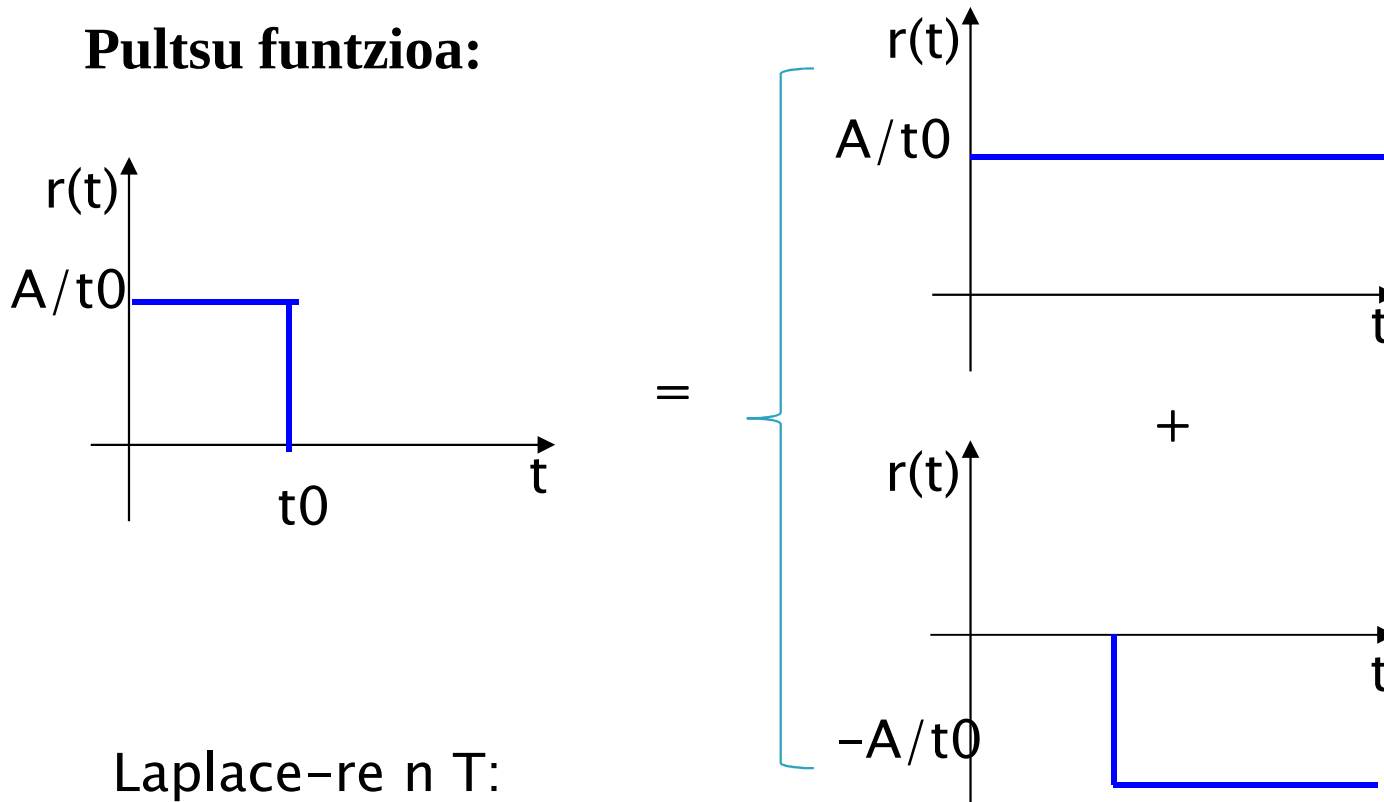
Demagun ondoko funtzioa , $f(t) = \frac{A}{t_0}, \quad 0 < t < t_0 \quad f(t) = 0, \quad t < 0, \quad t > t_0$



2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Funtzio batzuen kalkulua

Pultsu funtzioa:



$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$$

Laplace-ren T:

$$L[f(t)] = L\left[\frac{A}{t_0} 1(t)\right] - L\left[\frac{A}{t_0} 1(t - t_0)\right] = \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0})$$

Denborako translazioa:

$$L[f(t - a)] = e^{-as} F(s)$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Funtzio batzuen kalkulua

Impulso funtzioa:

Pulso funtzioaren limitea

$$f(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0}, 0 < t < t_0 \quad f(t) = 0, t < 0, t > t_0$$

$$L[f(t)] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0} [A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0} (t_0 s)} = \frac{As}{s} = A$$

(L' Hôpital)

Impulsoaren magnitudea bere azaleragatik neurtzen da (A/t₀ altuera, t₀ luzera)

A=1 denean impulso unitatea edo Dirac delta deitzen da $L[\delta(t - t_0)] = 1$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua Funtzio batzuen kalkulua

Laplace transform pairs

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
16	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Laplaceren alderantzizko transformatua

Orokorrean, Laplaceren transformatua sistemaren ekuazioetatik lortzen da eta alderantzizkoa taulen bitartez, beraz tauletan agertuko diren funtzio sinpleak izan behar dira.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s) \quad | \quad F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s) \text{ alderantzizko T. ezagunak dira}$$

$$\text{Orduan: } L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + \dots + L^{-1}[F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$$

Tauletan agertzen ez den $F(s)$ funtzio orokor baten deskonposaketa egiteko $F(s)$ funtzio horren poloak (izendatzailearen erroak) nolakoak diren jakin behar da: **errealak**, **irudikariak**, **desberdinak** eta abar.

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Laplaceren alderantzizko transformatua

1) Polo errealak eta desberdinak direnean:

$F(s)$ ondoko moduan adierazten bada:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}, \quad m < n$$

{

$p_1, p_2, \dots, p_n$ Poloak
 $z_1, z_2, \dots, z_m$ Zeroak

zeroak diren, $F(s)$ frakzio sinpleetan deskonposatu daiteke modu honetan:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \dots + \frac{a_n}{(s+p_n)}, \quad \text{non } k \text{te eta}$$

$s = -p_k$ poloaren hondarra deitzen den.

Honela lortzen delarik:

$$a_k = \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

Orduan $f(t) = L^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \dots + a_n e^{-p_n t}$ $t \geq 0$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Laplaceren alderantzizko transformatua

ADIBIDEA: $f(t) = L^{-1}[F(s)] = \text{????}$ Jakinik $F(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

Frakzio sinpleetan : $F(s) = \frac{a_1}{(s+1)} + \frac{a_2}{(s+3)}$

$$\text{non } a_1 = (s+1) \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-1} = 1 \quad a_2 = (s+3) \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

Beraz:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{\cancel{1}/2}{(s+3)}\right] = e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Laplaceren alderantzizko transformatua

2) Polo irudikariak direnean:

$F(s)$ funtzioaren poloak irudikariak direnean, funtzioa deskonposatu behar da tauletan agertzen den moduan:

$$L[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \qquad L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Adibidea: $f(t)$ funtzioa kalkulatu $f(t) = L^{-1}[F(s)]$, jakinik $F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$ dela.

$F(s)$ ren poloak $p_{1,2} = -1 \pm 2j$ irudikariak

$$F(s) = \frac{2s+12}{(s+1+2j)(s+1-2j)} = \frac{2s+12}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{10+2(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} = 5 \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = 5L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}\right] = 5e^{-t} \sin 2t + 2e^{-t} \cos 2t$$

$$L[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Laplaceren alderantzizko transformatua

2) Polo anizkoitzak direnean:

Hurrengo adibidearen bitartez azalduko da: $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

$s = -1$ puntuan polo hirukoitza dauka eta $F(s)$ funtzioa modu honetan deskonposatzen da:

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{a_1}{(s+1)} + \frac{a_2}{(s+1)^2} + \frac{a_3}{(s+1)^3}$$

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{a_1(s+1)^2 + a_2(s+1) + a_3}{(s+1)^3} = \frac{a_1s^2 + (2a_1 + a_2)s + a_1 + a_2 + a_3}{(s+1)^3} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ 2a_1 + a_2 &= 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 3 \end{aligned}$$

Orduan

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] = e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t} = (1 + t^2)e^{-t}$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Ekuazio diferentzialen ebazpena

Laplaceren transformatuaren metodoaren bidez ekuazio diferentzial lineal eta konstanteen emaitza orokorra lortu daiteke

Urratsak:

- 1 – Ekuazio diferentzialaren bere L.T. kalkulatzeko da
- 2 – Lortutako ekuazio aljebraikoa ebazten da.
- 3 – Emaitzaren Laplace-ren alderantzizko transformatua kalkulatzeko da

2 Gaia. Laplace-ren transformatua

Ekuazio diferentzialen ebazpena

Adibidea: Ebatzi ondoko ekuazio diferentziala $\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 5$

Hasierako baldintzak $\dot{x}(0) = 2$ eta $x(0) = -1$

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = sL\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] - \dot{f}(0) = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$L\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x\right) = L(5)$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3(sX(s) - x(0)) + 2X(s) = \frac{5}{s}$$

$$X(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$$

$$x(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

2 Gaia. Laplace-ren transformatua



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License](#).

You are free:

To Share — to copy, distribute and transmit the work

Under the following conditions:

Attribution — You must attribute the work in the manner specified by the author or licensor (but not in any way that suggests that they endorse you or your use of the work).

Noncommercial — You may not use this work for commercial purposes.

No Derivative Works — You may not alter, transform, or build upon this work.

With the understanding that:

Waiver — Any of the above conditions can be waived if you get permission from the copyright holder.

Public Domain — Where the work or any of its elements is in the public domain under applicable law, that status is in no way affected by the license.

Other Rights — In no way are any of the following rights affected by the license:

- Your fair dealing or fair use rights, or other applicable copyright exceptions and limitations;
- The author's moral rights;
- Rights other persons may have either in the work itself or in how the work is used, such as publicity or privacy rights: Some of the figures used in this work has been obtained from the Instructor Resources of *Modern Control Engineering*, Fifth Edition, Katsuhiko Ogata, copyrighted ©2010, ©2002, ©1997 by Pearson Education, Inc.

Notice — For any reuse or distribution, you must make clear to others the license terms of this work.