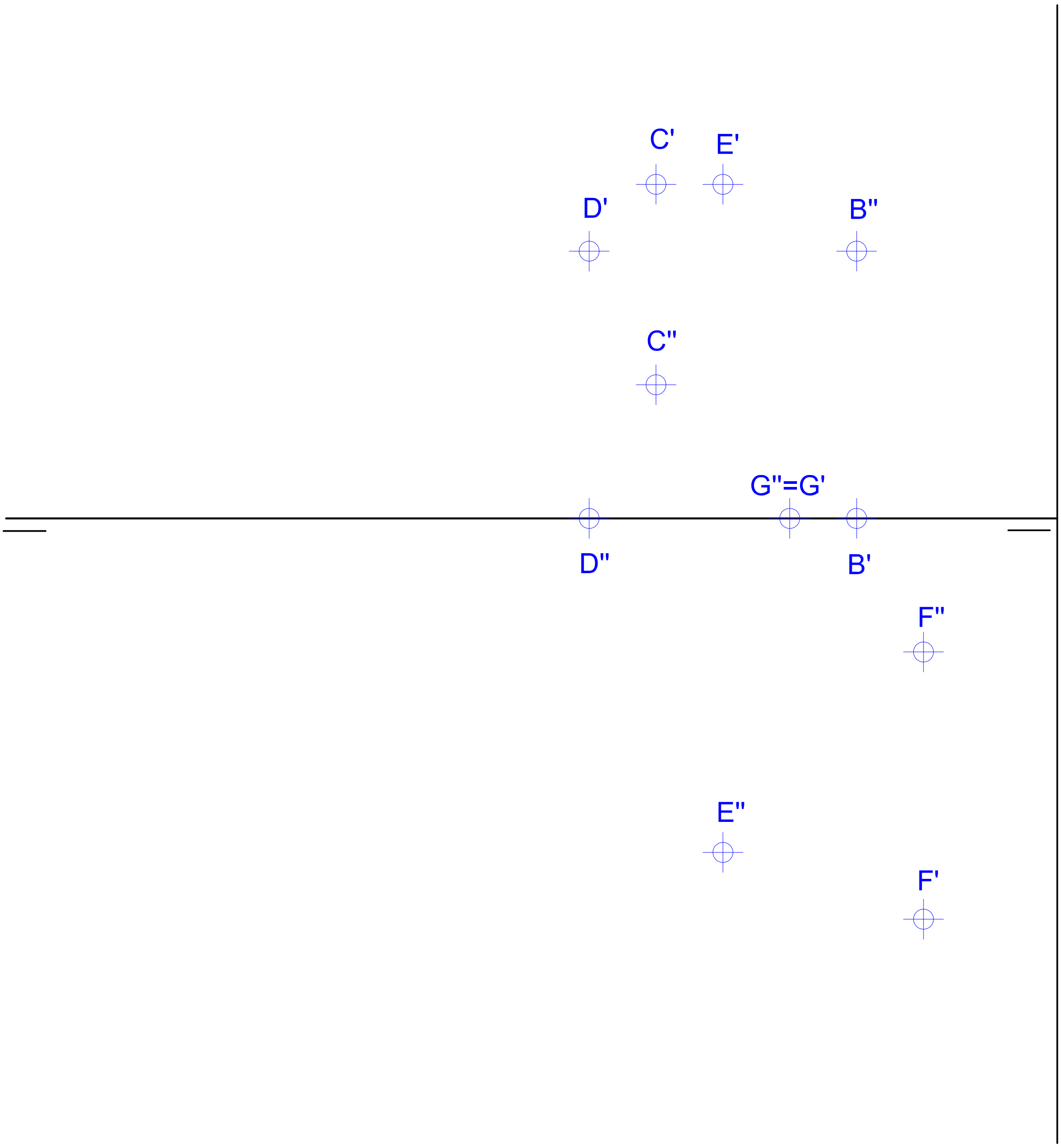
EJERCICIO 1

Representar las proyecciones diédricas de los puntos B, C, D, E,F Y G.

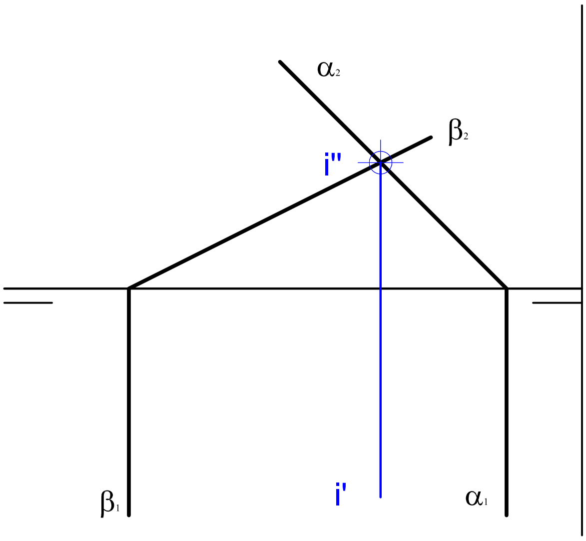


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 2

Hallar la intersección entre el plano α que contiene a los puntos (4,0,3), (1,0,0) y (1,1,0) y el plano β que contiene a los puntos (2,0,2), (6,0,0) y (6,3,0).

Hallar la intersección entre el plano α y el plano β.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Ejercicio 3

Hallar la intersección entre el plano β que contiene a los puntos A=(6,3,1), B=(1,1,2) y C=(3,y,4) y es perpendicular al plano XOY y el plano α que contiene al punto P(1,1,2) y es paralelo al plano XOZ.

<u>*Solución*</u>

- Cálculo del plano β:

$\overrightarrow{AB} = (-5,-2,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, y-3, 3)$. Con estos dos vectores se halla su vector normal:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & -2 & 1 \\ -3 & y-3 & 3 \end{vmatrix} = (-3-y)\,\vec{\imath} + 12\,\vec{\jmath} + (9-5y)\,\vec{k} = (-3-y, 12, 9-5y)$$

Como el plano β es perpendicular al plano XOY, cuyo vector normal es (0,0,1), se tiene que

$$(-3-y, 12, 9-5y)\cdot(0,0,1) = 0 \Rightarrow 9-5y = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{5} \Rightarrow C = (3, 9/5, 4)\ ;\ \vec{n} = (-24/5, 12, 0)$$

Con un punto del plano, por ejemplo el punto A, y el vector normal se obtiene la ecuación de β

$$\beta:\ -\frac{24}{5}(x-6) + 12(y-3) + 0(z-1) = 0\ \Rightarrow \beta:\ -4x + 10y - 6 = 0$$

- Cálculo del plano α:

Si α es paralelo al plano XOZ, su vector normal también lo será con lo que

$$\alpha: 0(x-1) + 1(y-1) + 0(z-2) = 0 \Rightarrow \alpha: y = 1$$

- Intersección entre los planos α y β:

$$\alpha \cap \beta = \begin{cases} y - 1 = 0 \\ -4x + 10y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Como $rg(M) = 2 = rg(M') <$ nº incógnitas, los planos se cortan según una recta. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se tiene que $x = 1; y = 1\ \forall z$ con lo que la recta intersección de los planos es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

Ejercicio 4

Definir el plano paralelo a la recta $r: \begin{cases} x+3z=11 \\ y+3z=6 \end{cases}$ *y que contenga a la recta* $t: \frac{x-2}{3} = 1-y = \frac{z}{3}$

<u>*Solución:*</u>

Se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta t:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = 1-y \\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=3-3y \\ x-2=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$$

por lo tanto el haz de planos que contiene a la recta t es:

$$x+3y-5+\lambda(x-z-2)=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+3y-\lambda z-5-2\lambda=0$$

Se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta r haciendo $z=\lambda$:

$r: \begin{cases} x=11-3\lambda \\ y=6-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ con lo que el vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (-3,-3,1)$

Como el plano π buscado es paralelo a la recta r, su vector normal será perpendicular al vector director de la recta:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (1+\lambda, 3, -\lambda)\cdot(-3,-3,1)=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

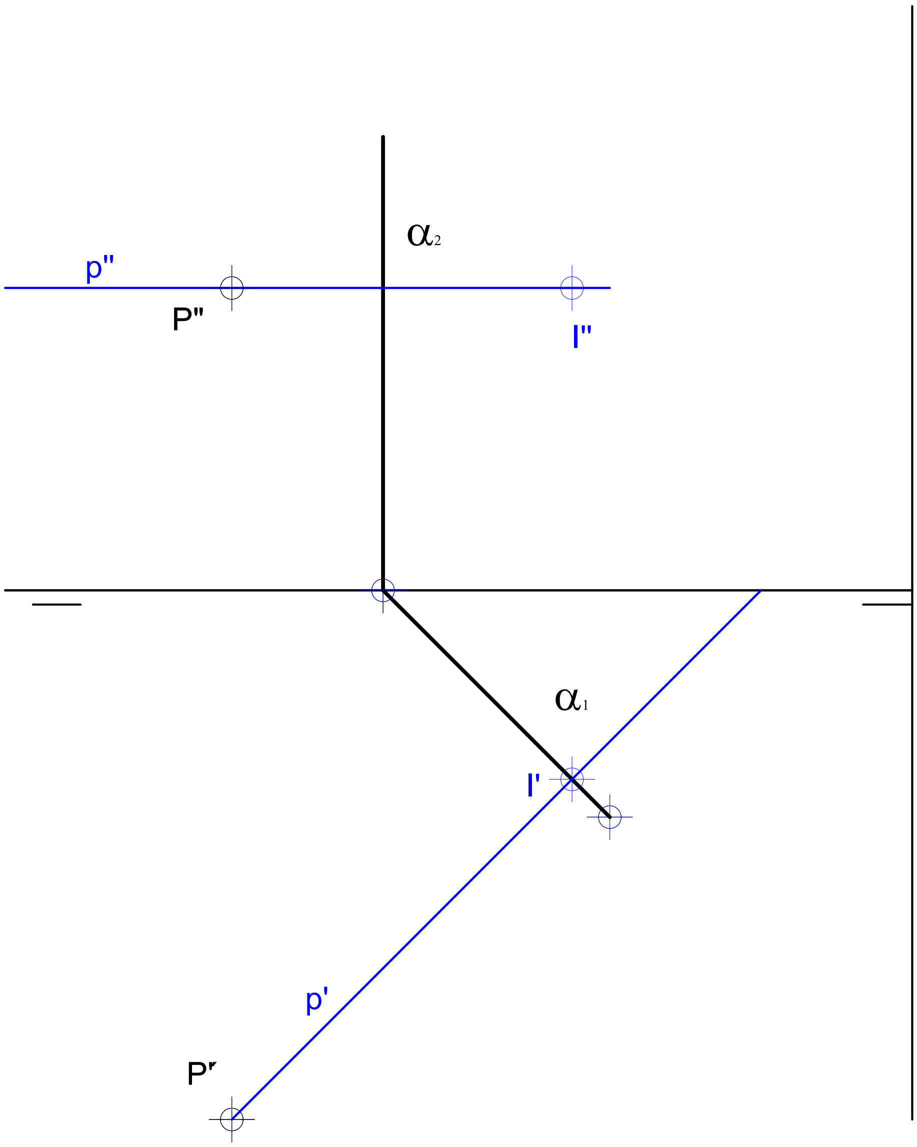
Sustituyendo este valor en el haz de planos calculado anteriormente se obtiene el plano π buscado :

$$(1+(-3))x+3y-(-3)z-5-2(-3)=0 \Rightarrow \pi: -2x+3y+3z+1=0$$

EJERCICIO 5

*Trazar por **P**(9,7,4) una recta perpendicular a α (plano que contiene a los puntos (7,0,0) y (4,3,0) y es perpendicular al plano z=0). Hallar el punto de intersección entre ambos*

Trazar por el punto P una recta p perpendicular a α. Hallar el punto I de intersección de ambos.

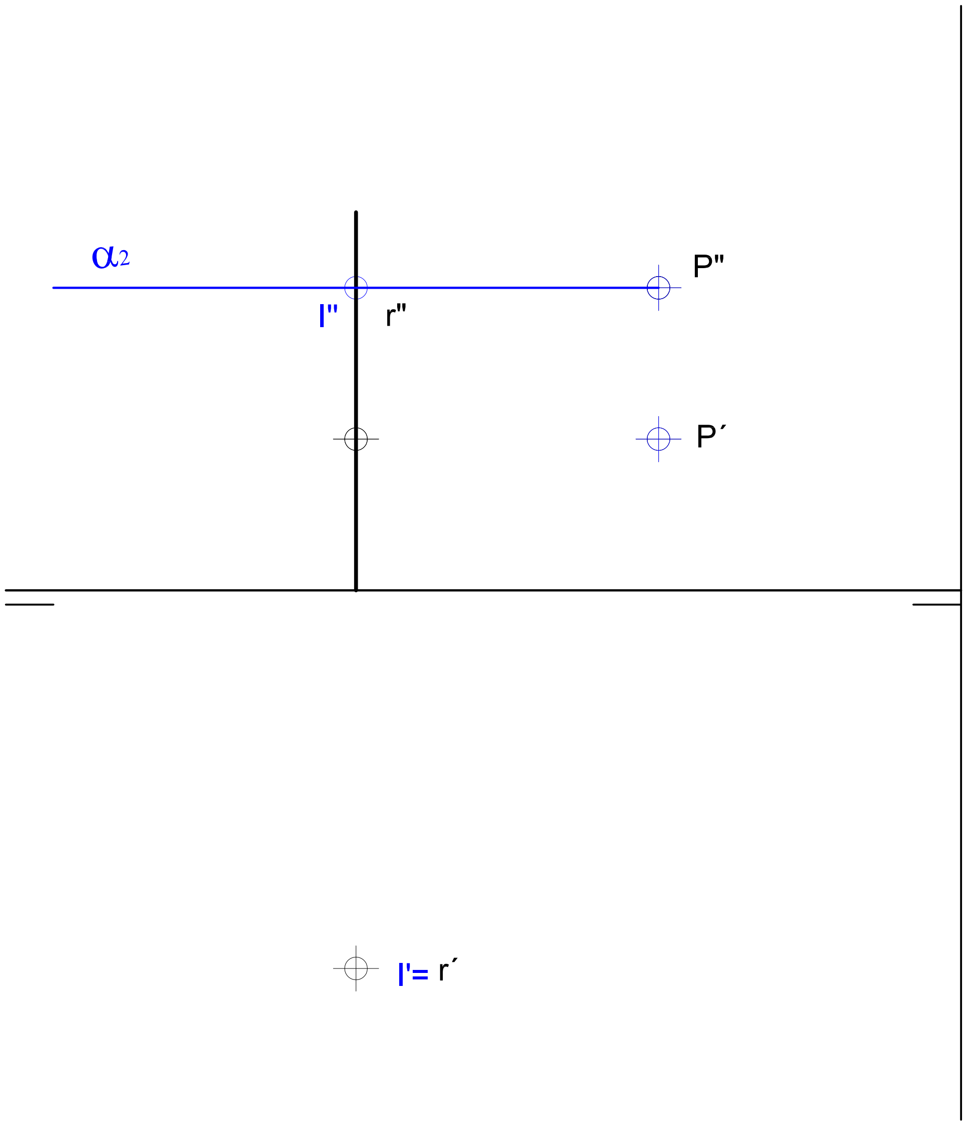


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 6

Trazar por P(2,-2,4) un plano perpendicular a la recta que contiene al punto (8,5,2) y es perpendicular al plano XOY. Hallar el punto de intersección entre ambos.

Trazar por el punto P un plano α perpendicular a r. Hallar el punto I de intersección de ambos.



El plano es paralelo al PH

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Ejercicio 7

Trazar por el punto P=(12,3,6) una recta perpendicular a r que pase por los puntos (6,5,4) y (0,8,7) y que sea paralela al plano α que contiene a los puntos (11,0,0), (6,0,2) y (8,4,0).

<u>*Solución:*</u>

- Cálculo de la recta r:

  Sean $A = (6,5,4)$ y $B = (0,8,7)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (-6,3,3)$ es un vector director de la recta. La ecuación de r en forma continua es:

$$r: \frac{x}{-6} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-7}{3}$$

- Cálculo del plano α:

  Sean $A = (11,0,0), B = (6,0,2)$ y $C = (8,4,0)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (-5,0,2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3,4,0)$. La ecuación de α en forma continua es:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-11 & -5 & -3 \\ y & 0 & 4 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4x + 3y + 10z - 44 = 0$$

- Cálculo de la recta pedida s:

  La recta buscada tiene como vector director un vector que es perpendicular al vector director de la recta r y al vector normal al plano α:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \wedge \vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 7\,\vec{\imath} + 24\,\vec{\jmath} - 10\vec{k} = (7,24,-10)$$

  Por tanto la recta s tiene por ecuación:

$$s: \frac{x-12}{7} = \frac{y-3}{24} = \frac{z-6}{-10}$$

Ejercicio 10

Calcular la distancia entre los puntos A=(4,8,6) y B=(4,3,3)

Solución:

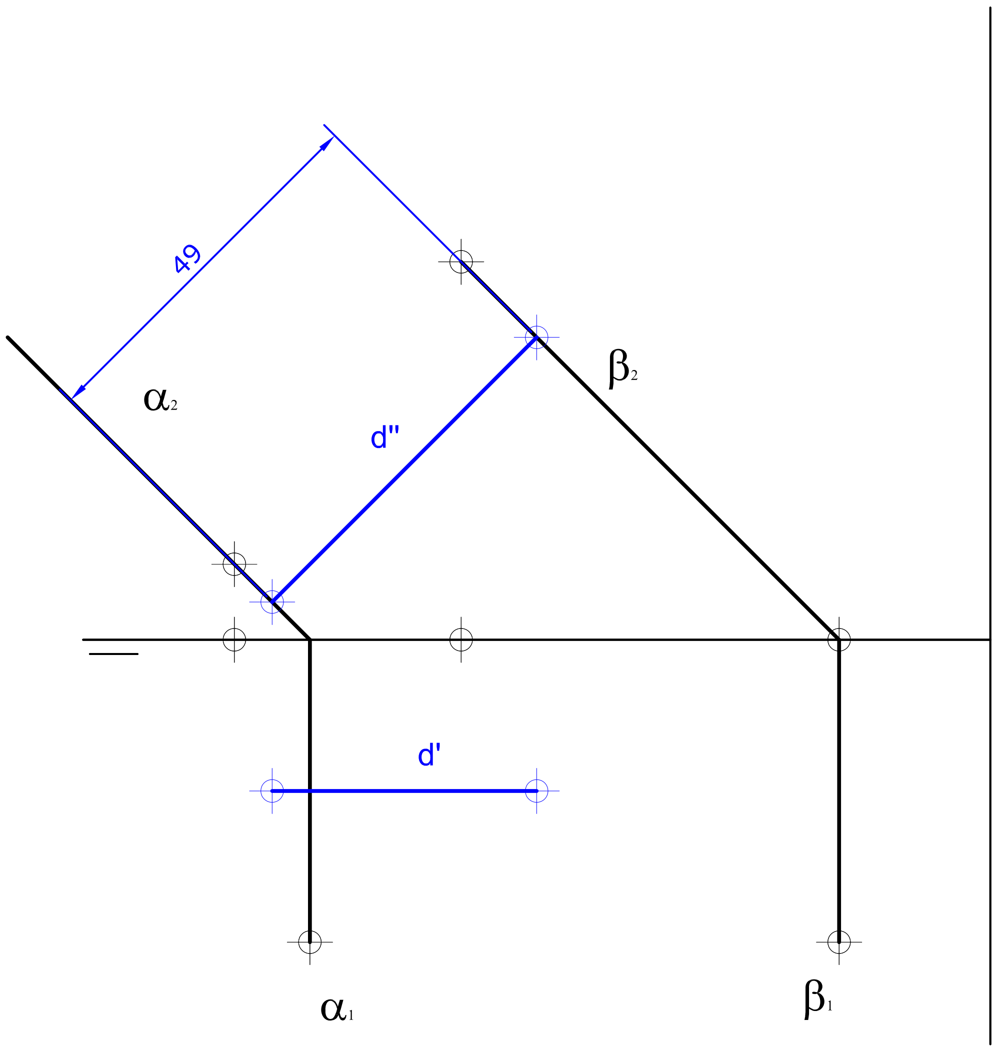
Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos

$$d(A,B) = \sqrt{(4-4)^2 + (3-8)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

EJERCICIO 13

Hallar la distancia entre los planos dados α (definido por los puntos (9,0,0), (10,0,1) y (9,4,0)) y β (definido por los puntos (2,0,0), (7,0,5)y (2,4,0)).

Hallar la distancia entre los planos α y β.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Ejercicio 14

Hallar el plano mediador entre los planos α (definido por los puntos (9,0,0), (10,0,1) y (9,4,0)) y β (definido por los puntos (2,0,0), (7,0,5)y (2,4,0)).

<u>*Solución:*</u>

- Cálculo del plano α:

  Sean $A = (9,0,0)$, $B = (10,0,1)$ y $C = (9,4,0)$

  $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AC} = (0,4,0)$. Con estos dos vectores se halla su vector normal:

  $$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 4\vec{k} = (-4,0,4)$$

  El plano α que pasa por el punto A y cuyo vector asociado es $\vec{n}_\alpha$ es:

  $$-4(x-9) + 0(y-0) + 4(z-0) \Rightarrow \ \alpha: x - z - 9 = 0$$

- Cálculo del plano β:

  Sean $D = (2,0,0)$, $E = (7,0,5)$ y $F = (2,4,0)$

  $\overrightarrow{DE} = (5,0,5)$, $\overrightarrow{DF} = (0,4,0)$. Con estos dos vectores se halla su vector normal:

  $$\vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -20\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 20\vec{k} = (-20,0,20)$$

  El plano β que pasa por el punto D y cuyo vector asociado es $\vec{n}_\beta$ es:

  $$-20(x-2) + 0(y-0) + 20(z-0) \Rightarrow \ \beta: x - z - 2 = 0$$

- Cálculo del plano mediador:

  Por el punto $D = (2,0,0)$ se halla una recta perpendicular a los planos α y β:

  $$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 0 \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

  Se calcula la intersección de la recta r y el plano α:

  $$(2-4\lambda) - 4\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -\tfrac{7}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 7/2 \\ y = 0 \\ z = -7/2 \end{cases} \Rightarrow P = r \cap \alpha = \left(\tfrac{11}{2}, 0, -\tfrac{7}{2}\right)$$

  Se obtiene el punto medio del segmento $\overline{DP}$:

  $$M = \frac{D+P}{2} = \frac{(2,0,0) + \left(\frac{11}{2}, 0, -\frac{7}{2}\right)}{2} = \left(\frac{15}{4}, 0, -\frac{7}{4}\right)$$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Ejercicio 14

El plano mediador de α y β tendrá por ecuación $x - z + K = 0$. Como el punto M debe pertenecer al plano buscado:

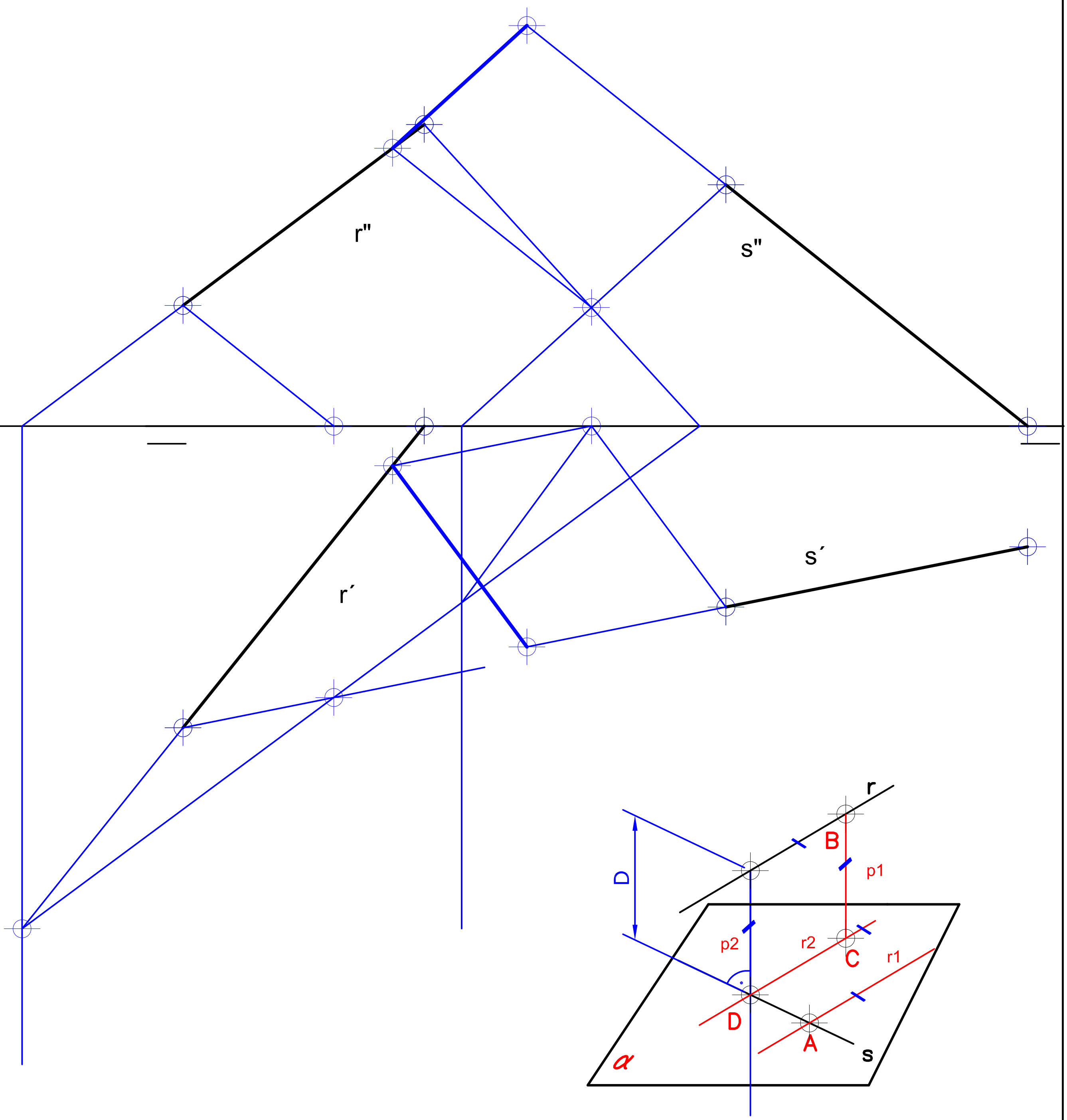
$$\frac{15}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) + K = 0 \Rightarrow K = -\frac{22}{4}$$

El plano mediador buscado es el plano $x - z - \frac{22}{4} = 0$

EJERCICIO 18

*Hallar la distancia entre la recta **r** ((13,0,5)(17,5,2)) y la recta **s** ((3,2,0)(8,3,4))*

Hallar la distancia entre la recta r y la recta s.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Ejercicio 19

Hallar la distancia del punto $A = (1,2,5)$ *al plano* $\alpha: 2x + 2y - z - 5 = 0$*.*

Solución:

Se comprueba que el punto A no pertenece al plano: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 5 - 5 = -4 \neq 0 \Rightarrow A \notin \alpha$

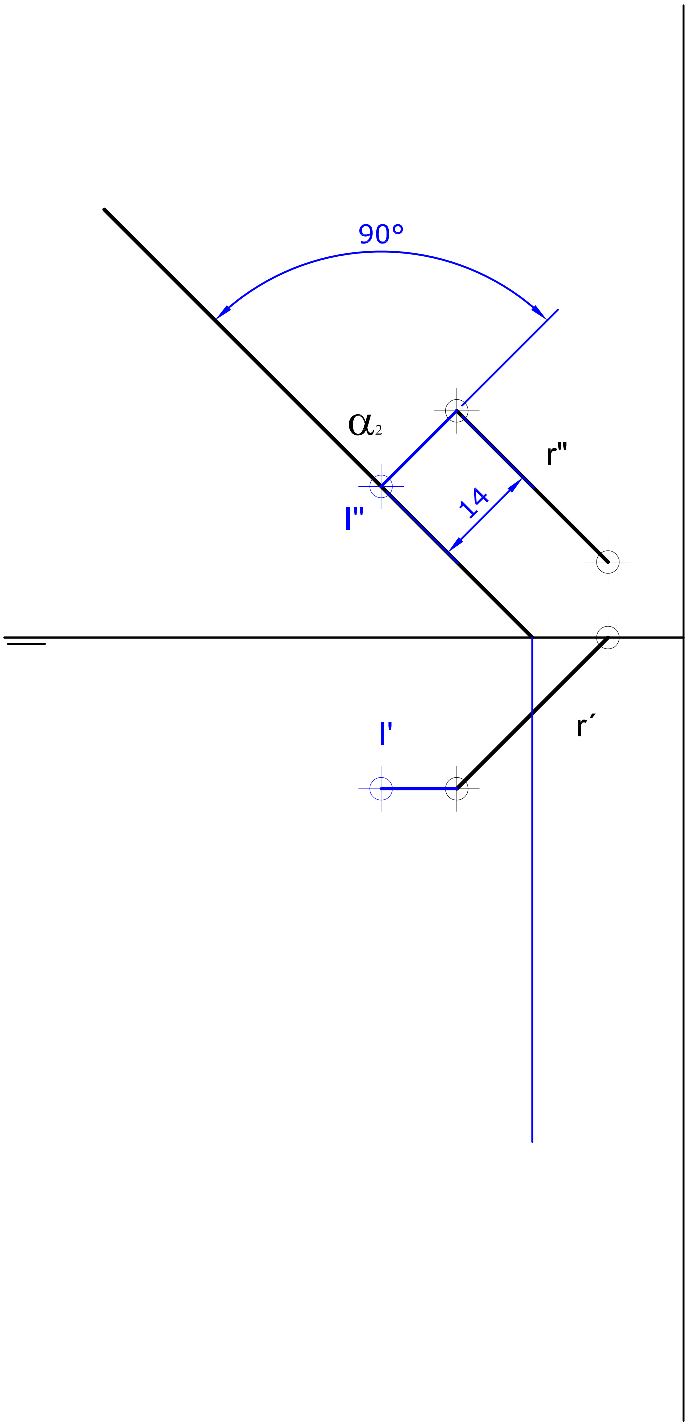
Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

EJERCICIO 20

A partir de las ecuaciones de la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ *y del plano* $\alpha: x-z=2$. *Hallar la distancia de* r *a* α.

Hallar la distancia entre el plano α (proyectante vertical) y la recta r.



Ejercicio 21

Hallar la distancia del punto $P = (1,3,-1)$ *a la recta* $r\colon \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

<u>*Solución:*</u>

Se comprueba que el punto P no pertenece a la recta: $\begin{cases} 1 - 3 \neq 0 \\ 1 + 3 - (-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P \notin r$

A partir de las ecuaciones implícitas de la recta se obtienen sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{z}{2}, y = \frac{z}{2}$$

Entonces r: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con lo que $\vec{v}_r = (1,1,2)$.

Se toma un punto cualquiera de la recta r, $A = (0,0,0)$, y se forma el vector $\overrightarrow{AP} = (1,3,-1)$.

Aplicando la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{\frac{62}{6}} = \sqrt{\frac{31}{3}}$$

ya que $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\,\vec{i} - 3\,\vec{j} - 2\vec{k}$

Ejercicio 22

Hallar la distancia entre las rectas $r: \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$ *y* $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

Solución:

Se toma un vector director de cada una de las rectas, $\vec{v}_r = (3,-2,-2)$ y $\vec{v}_s = (-2,1,2)$. Como los vectores no son paralelos, las rectas o bien se cortan en un punto o bien se cruzan.

Se toma un punto de cada una de las rectas $A = (-3,9,8) \in r$ y $B = (6,-7,-7) \in s$ y se forma el vector $\overrightarrow{AB} = (6,-7,-7)$.

Para estudiar la posición relativa de las rectas basta con estudiar el rango de la matriz $\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right)$.

$$rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 3$$

Como $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \neq rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = 3$, las rectas se cruzan en el espacio. Para calcular la distancia entre ella aplicamos la fórmula correspondiente:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right)\right|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s)\right|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|} = \frac{|(6,-7,-7) \cdot (-2,-2,-1)|}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

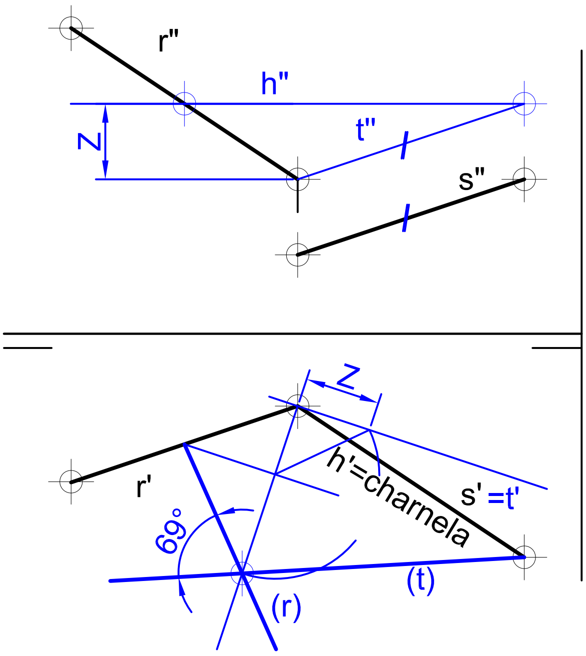
ya que

$$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} - \vec{k} \Rightarrow |\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

EJERCICIO 23

Hallar el ángulo que forman las rectas $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x - 3y = 1} \\ \boldsymbol{2y = z} \end{cases}$ *y la recta s que pasa por los puntos (4,1,1) y (1,3,3).*

Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.

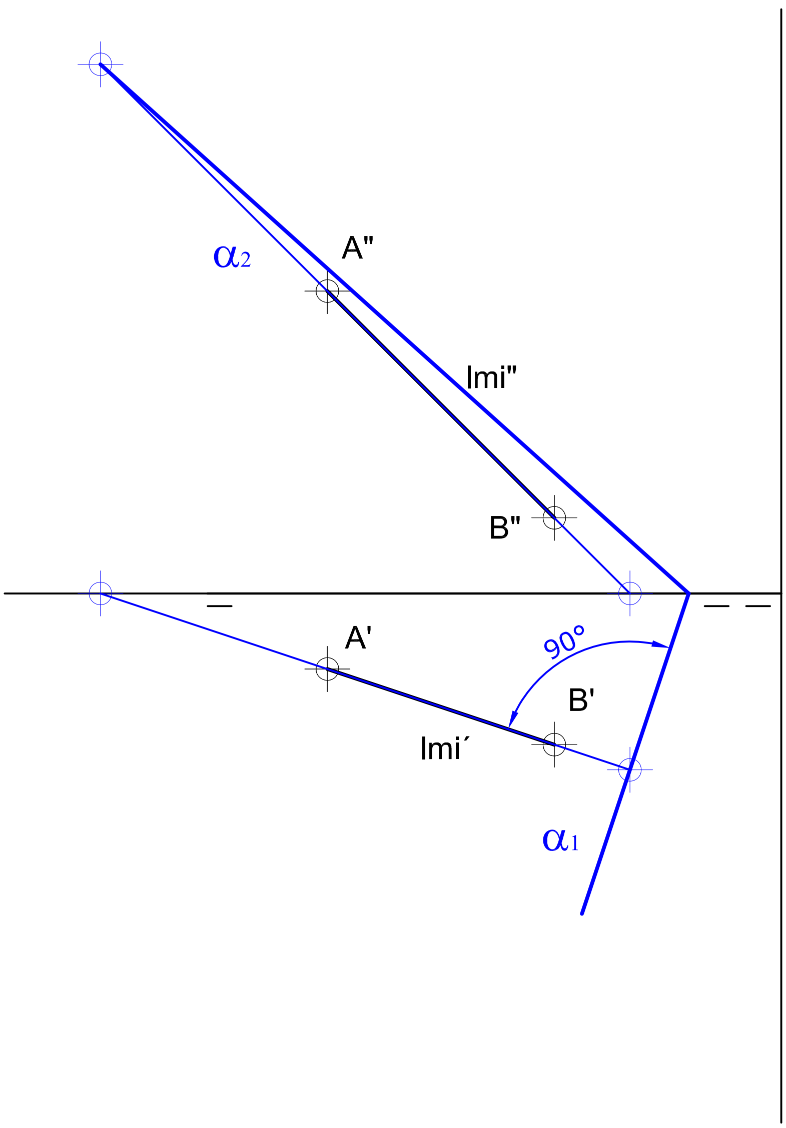


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 27

Definir el plano α cuya línea de máxima inclinación es la recta s: $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 3y + z = 7 \end{cases}$

Trazar α si lmi es su línea de máxima inclinación.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 30

Sean los puntos P(11,-3,3) y Q(--,-3,-3), definir los vértices de un cuadrado ABCD sabiendo que

- *los vértices del cuadrado equidistan de los puntos P y Q*
- *La distancia entre los puntos P y Q es 10*
- *El punto A está contenido en el plano y=0*
- *La tercera componente (cota) de A es 4*

Dibujar el cuadrado de vértices ABCD que equidistan de los puntos P y Q.

<u>Datos:</u>

1. El punto Q tiene cota (-3) y es del primer bisector
2. La distancia PQ es de 10
3. A es un punto del PV y tiene de cota 4