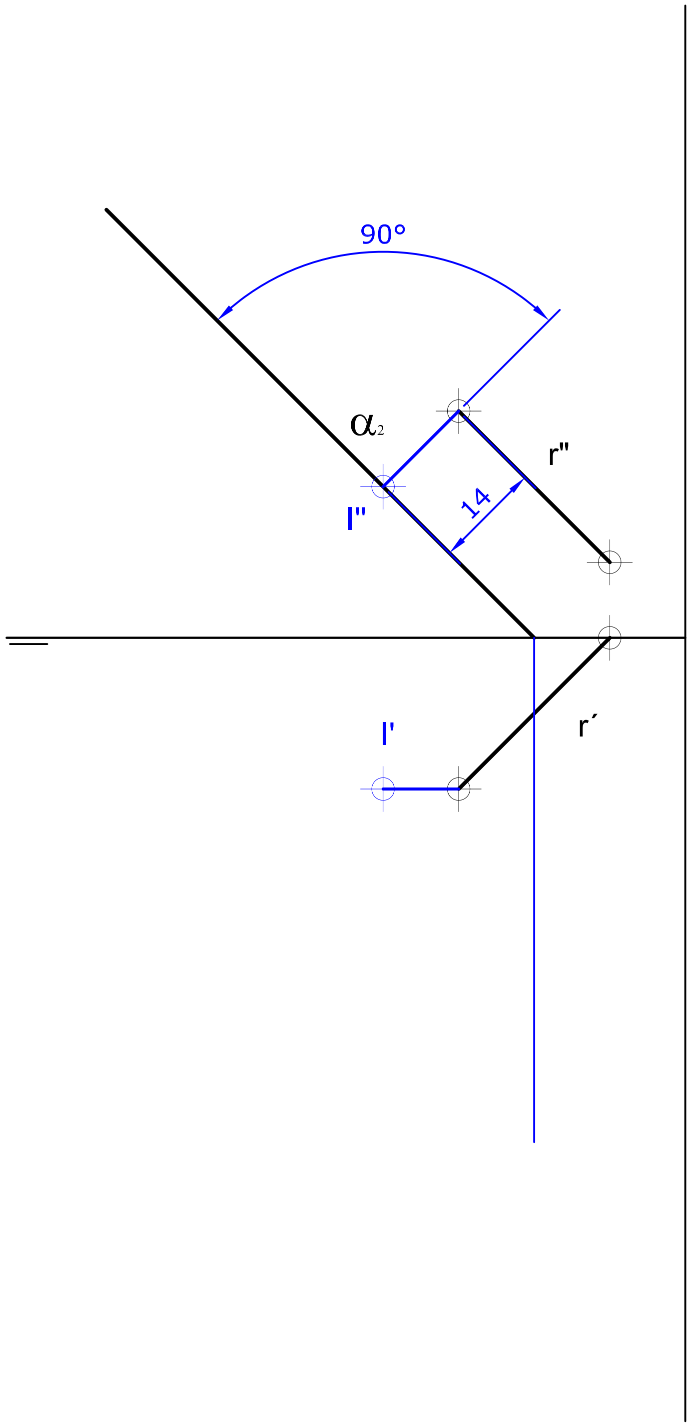
EJERCICIO 20

A partir de las ecuaciones de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ *y del plano* $\alpha : x - z = 2$*. Hallar la distancia de* r *a* α*.*

Hallar la distancia entre el plano α (proyectante vertical) y la recta r.



Ejercicio 21

Hallar la distancia del punto $P=(1,3,-1)$ *a la recta* $r:\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

<u>*Solución:*</u>

Se comprueba que el punto P no pertenece a la recta: $\begin{cases} 1-3\neq 0 \\ 1+3-(-1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow P\notin r$

A partir de las ecuaciones implícitas de la recta se obtienen sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=z \end{cases} \Rightarrow x=\frac{z}{2}, y=\frac{z}{2}$$

Entonces r: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con lo que $\vec{v}_r=(1,1,2)$.

Se toma un punto cualquiera de la recta r, $A=(0,0,0)$, y se forma el vector $\overrightarrow{AP}=(1,3,-1)$.

Aplicando la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|}=\frac{\sqrt{7^2+(-3)^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{\frac{62}{6}}=\sqrt{\frac{31}{3}}$$

ya que $\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}_r=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=7\,\vec{i}-3\,\vec{j}-2\vec{k}$

Ejercicio 22

Hallar la distancia entre las rectas $r: \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$ *y* $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

<u>*Solución:*</u>

Se toma un vector director de cada una de las rectas, $\vec{v}_r = (3,-2,-2)$ y $\vec{v}_s = (-2,1,2)$. Como los vectores no son paralelos, las rectas o bien se cortan en un punto o bien se cruzan.

Se toma un punto de cada una de las rectas $A = (-3,9,8) \in r$ y $B = (6,-7,-7) \in s$ y se forma el vector $\overrightarrow{AB} = (6,-7,-7)$.

Para estudiar la posición relativa de las rectas basta con estudiar el rango de la matriz $\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right)$.

$$rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} = 3$$

Como $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \neq rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = 3$, las rectas se cruzan en el espacio. Para calcular la distancia entre ella aplicamos la fórmula correspondiente:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s\right)\right|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s)\right|}{|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s|} = \frac{|(6,-7,-7) \cdot (-2,-2,-1)|}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

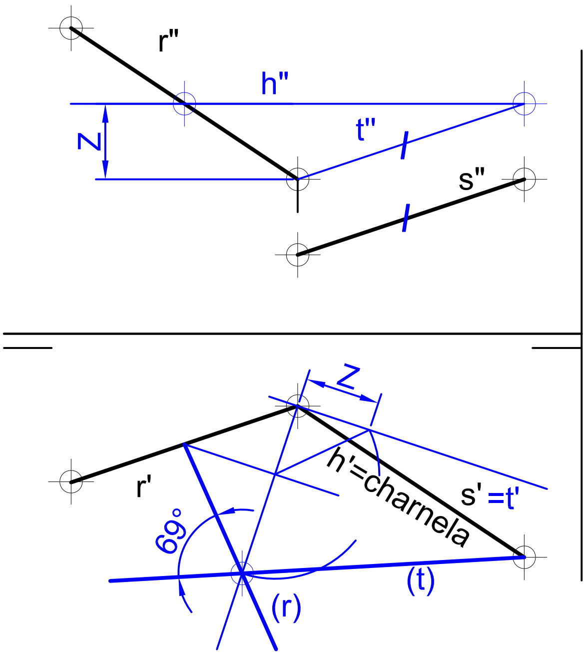
ya que

$$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} - \vec{k} \Rightarrow |\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

EJERCICIO 23

Hallar el ángulo que forman las rectas $\boldsymbol{r}:\begin{cases} \boldsymbol{x-3y=1} \\ \boldsymbol{2y=z} \end{cases}$ *y la recta s que pasa por los puntos (4,1,1) y (1,3,3).*

Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.

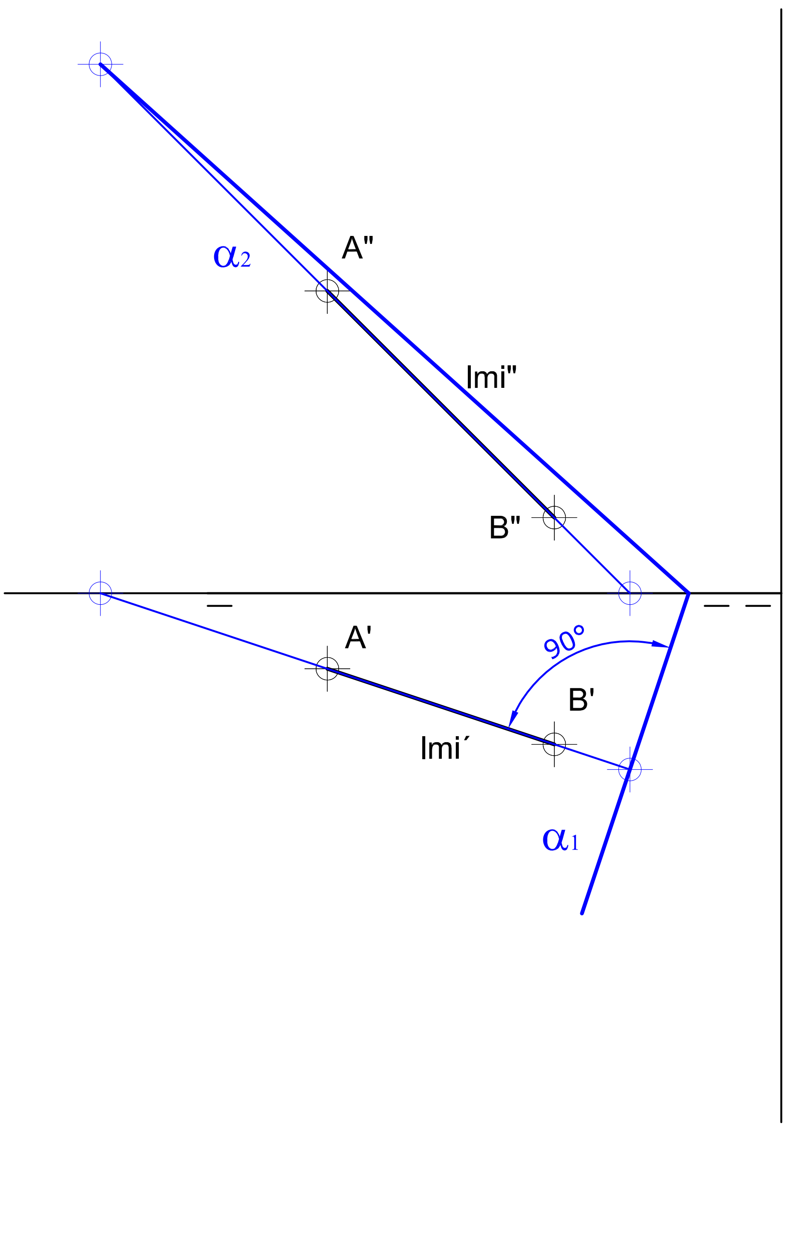


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 27

Definir el plano α cuya línea de máxima inclinación es la recta $s: \begin{cases} x + 3y = 9 \\ 3y + z = 7 \end{cases}$

Trazar α si lmi es su línea de máxima inclinación.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 30

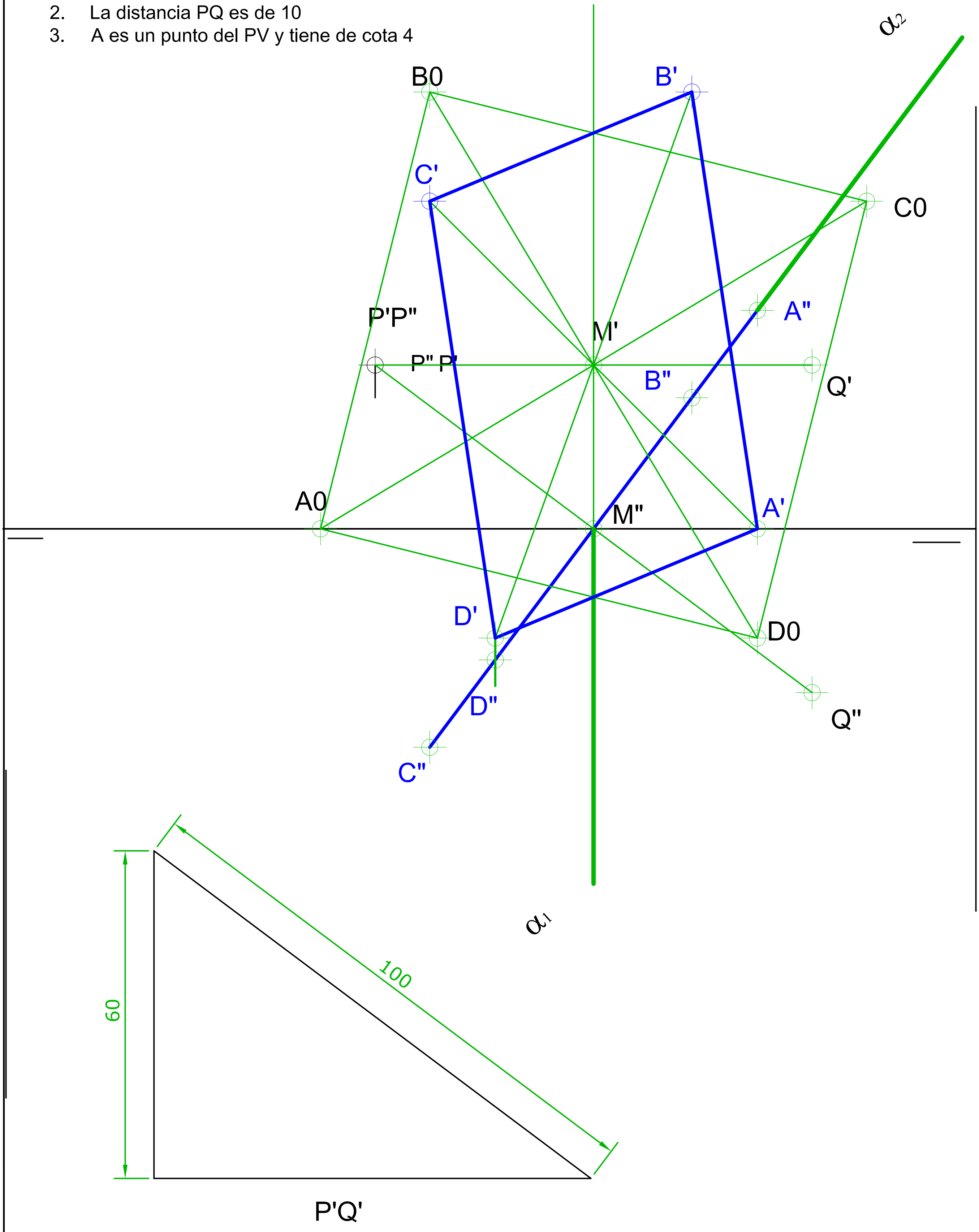
Sean los puntos P(11,-3,3) y Q(--,-3,-3), definir los vértices de un cuadrado ABCD sabiendo que

- *los vértices del cuadrado equidistan de los puntos P y Q*
- *La distancia entre los puntos P y Q es 10*
- *El punto A está contenido en el plano y=0*
- *La tercera componente (cota) de A es 4*

Dibujar el cuadrado de vértices ABCD que equidistan de los puntos P y Q.

<u>Datos:</u>

1. El punto Q tiene cota (-3) y es del primer bisector
2. La distancia PQ es de 10
3. A es un punto del PV y tiene de cota 4



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe