EJERCICIO 1

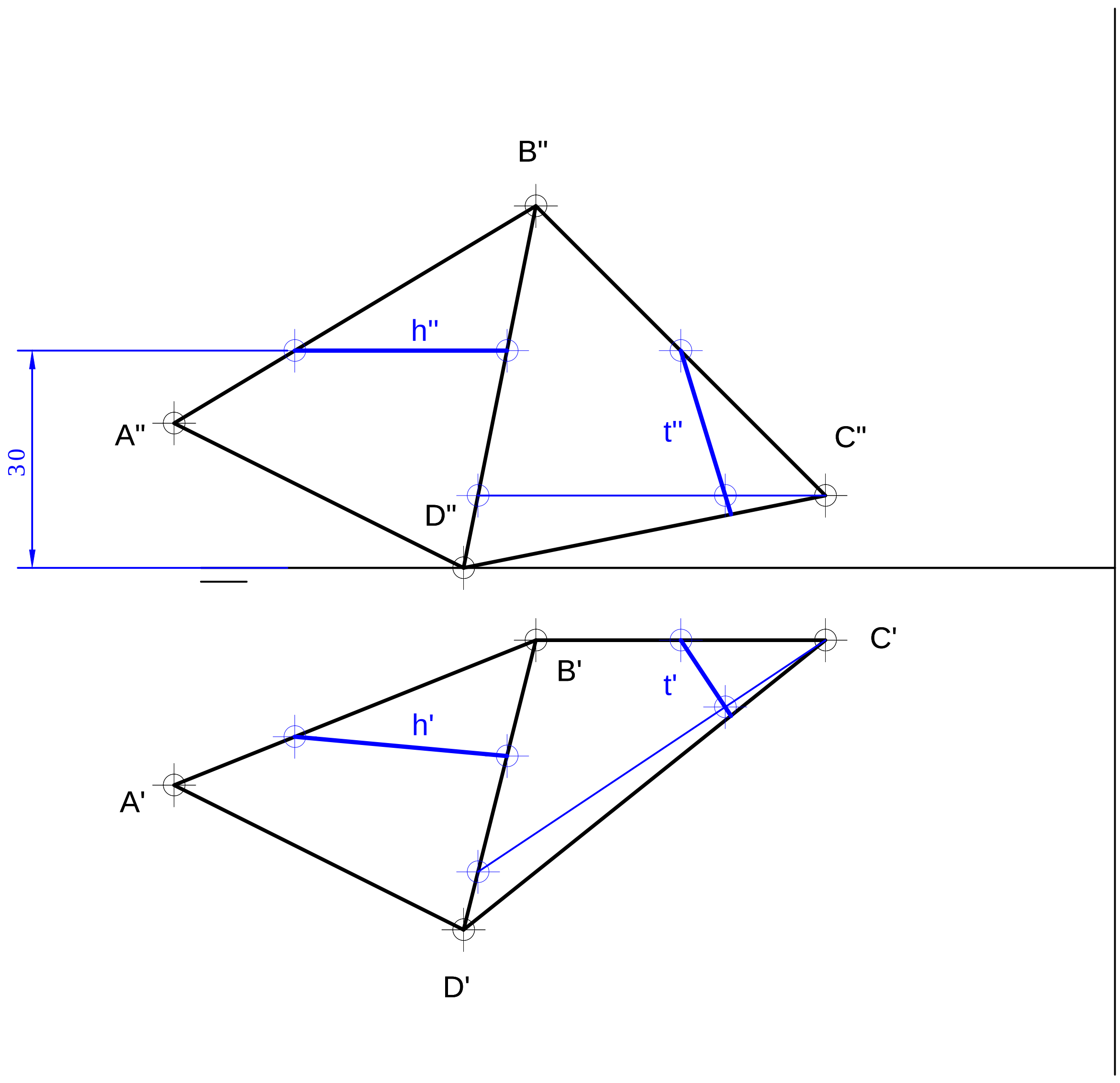
Sean los puntos $A(13,3,2)$, $B(8,1,5)$, $C(4,1,1)$ y $D(9,5,0)$ de forma que ABC y BDC son dos planos que forman parte de un tejado.

- Definir la recta del plano ABD, paralela al XOY cuyos puntos tienen de cota 3

- Definir la trayectoria de una gota de agua que parte del punto medio de la recta BC

ABD y BDC son dos planos que forman parte de un tejado. Trazar una horizontal del plano ABD de cota 3

Dibujar la trayectoria de una gota de agua que parte de un punto medio de la recta BC



La recta "t" es la trayectoria de la gota de agua

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

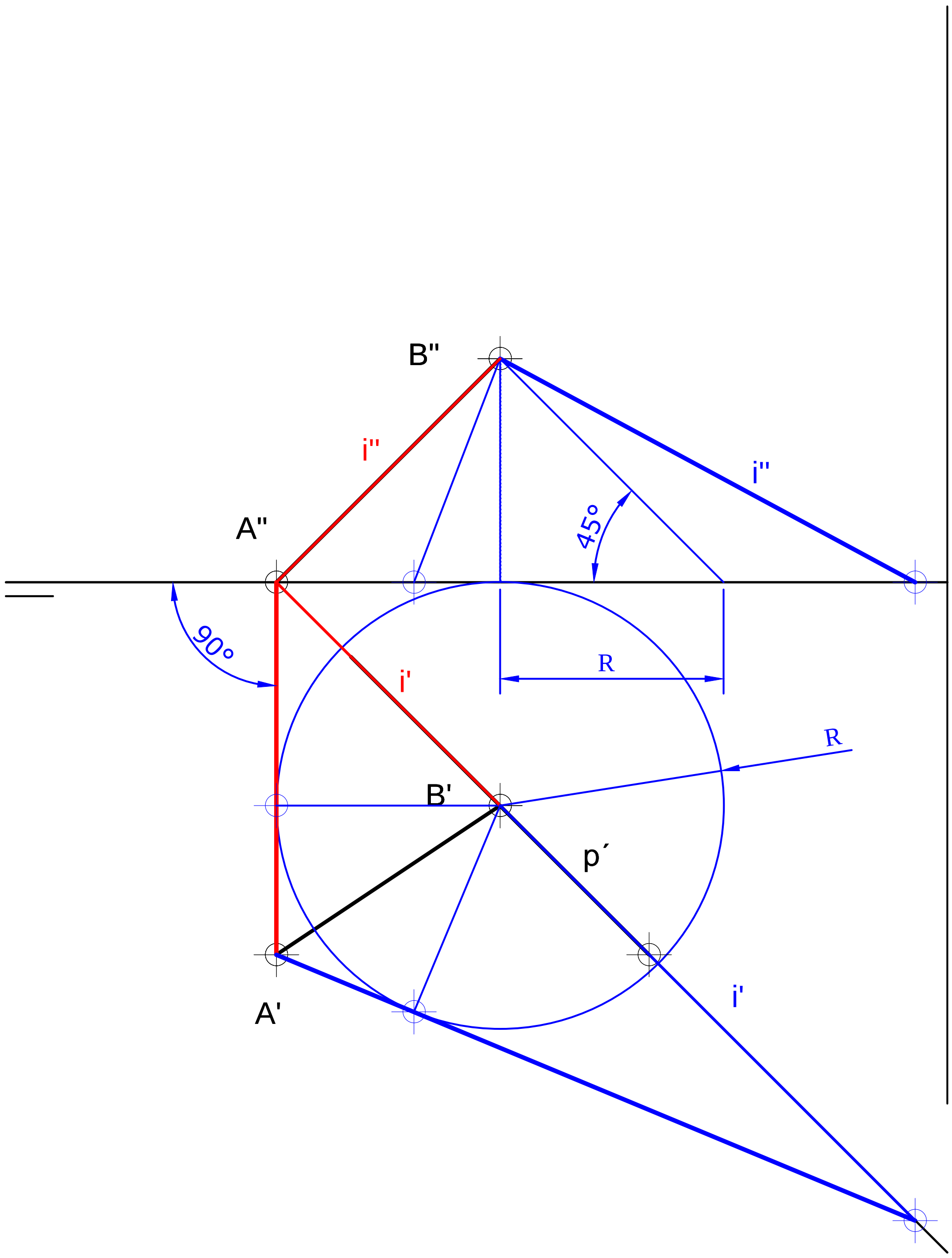
EJERCICIO 2

Los puntos A(9,5,0) y B(6,3,3) pertenecen a la recta intersección de dos placas de hormigón simétricas.

- *Definir los planos anteriores sabiendo que su pendiente es 45º*
- *Hallar las intersecciones a esos planos con un plano vertical que contenga a las recta que pasa por los puntos (6,3,z) y (4,5,z) y al plano horizontal*

AB es la recta intersección de dos placas de hormigón simétricas. Dibujar los planos y sus intersecciones con un plano vertical que contenga a la recta "p" y el plano horizontal

Datos: Pendiente de los planos = 45º

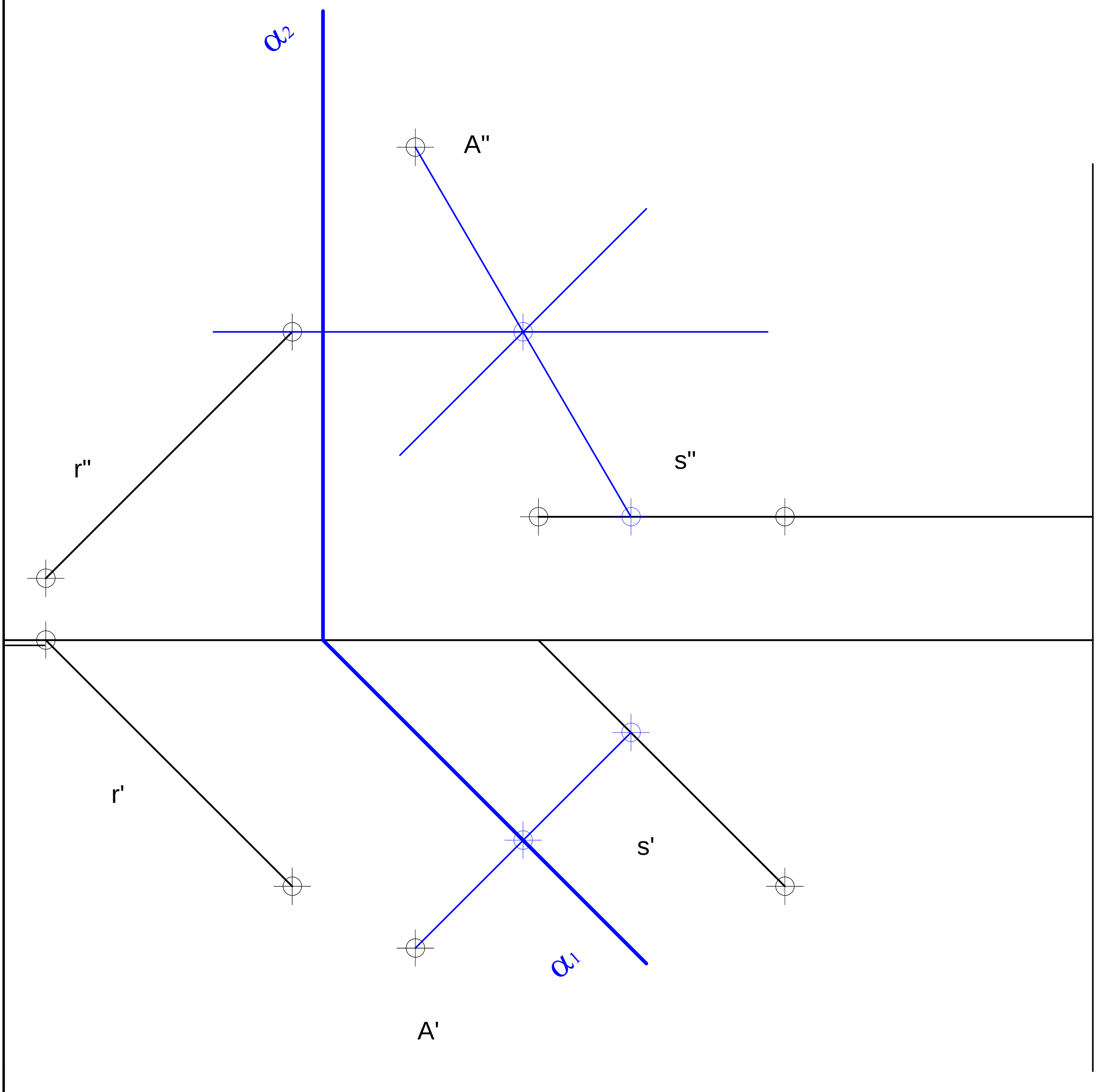


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 3

Sean s *la recta que pasa por los puntos* $B = (9,0,2)$ *y* $C = (5,4,2)$ *y* r *la recta que pasa por los puntos* $D = (13,4,5)$ *y* $E = (17,0,1)$. *Hallar la ecuación de un plano que equidiste del punto* $A = (11,5,8)$ *y de la recta* s *y que sea paralelo a la recta* r.

Trazar un plano que equidiste del punto A y de la recta s y sea paralelo a la recta r.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 1

Sean los puntos $A(13,3,2)$, $B(8,1,5)$, $C(4,1,1)$ y $D(9,5,0)$ de forma que ABC y BDC son dos planos que forman parte de un tejado.
- Definir la recta del plano ABD, paralela al XOY cuyos puntos tienen de cota 3
- Definir la trayectoria de una gota de agua que parte del punto medio de la recta BC

En primer lugar se obtiene la ecuación implícita del plano ABD, utilizando para ello el punto $A(13,3,2)$ y el vector asociado $\vec{n}_{ABC}$. Dicho vector se obtiene al calcular el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB} = (-5,-2,3)$ y $\overrightarrow{AD} = (-4,2,-2)$.

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -5 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 22\vec{\jmath} - 18\vec{k} \Rightarrow \vec{n}_{ABC} = (1,11,9)$$

Por lo que la ecuación implícita del plano ABD es:

$$(x-13) + 11(y-3) + 9(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$ABD: x + 11y + 9z - 64 = 0$$

Para definir la recta contenida en el plano ABD es necesario conocer un punto $P = (x,y,3)$ y el vector director $\vec{v}_r = (a,b,c)$ de la misma.

Como la recta r está contenida en el plano el vector director de la misma, $\vec{v}_r$ es ortogonal al vector $\vec{n}_{ABC}$, además como la recta es paralela al plano XOY, el vector $\vec{v}_r$ también es ortogonal al vector $(0,0,1)$. Por tanto:

$$\begin{cases} \vec{v}_r \perp \vec{n}_{ABC} \Rightarrow (a,b,c)\cdot(1,11,9) = 0 \\ \vec{v}_r \perp (0,0,1) \Rightarrow (a,b,c)\cdot(0,0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -11b \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-11b, b, 0)$$

Por ejemplo, considérese el vector director $\vec{v}_r = (-11,1,0)$. Sólo falta determinar el punto $P = (x,y,3)$, para ello basta tener en cuenta que el punto está en la recta, la que a su vez está contenida en el plano, por lo que el punto está en el plano ABD. Por esta razón, las coordenadas x e y del punto deben satisfacer la ecuación:

$$x + 11y = 64 - 27 \Rightarrow x + 11y = 37$$

Por ejemplo, $x = 4$ e $y = 3$, siendo el punto en este caso $P = (4,3,3)$.

La resta que buscada tiene el vector director $\vec{v}_r = (-11,1,0)$ y contiene al punto $P = (4,3,3)$.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 1

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 44 - 11t \\ y = 3 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

Siendo sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x + 11y - 37 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

- *Definir la trayectoria de una gota de agua que parte del punto medio de la recta* BC

Se obtiene el punto medio de la recta BC para calcular el punto desde el que parte la gota de agua:

$$M = \frac{B + C}{2} = (6,1,3)$$

La trayectoria de la gota será la recta de máxima pendiente. Los pasos a realizar para determinar la recta de máxima pendiente son:

- Se considera el plano que contiene la recta BC, es decir, el plano BDC y se calcula la recta r, la intersección entre este plano y el OXY:

Para calcular el plano se utilizan los vectores $\overrightarrow{BD} = (1,4,-5)$ y $\overrightarrow{BC} = (-4,0,-4)$ y punto $B(8,1,5)$ de forma que la ecuación implícita del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-8 & 1 & -4 \\ y-1 & 4 & 0 \\ z-5 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow BDC: \quad -2x + 3y + 2z + 3 = 0$$

La recta r es la intersección entre el plano anterior y el plano horizontal OXY, es decir, sus ecuaciones implícitas son:

$$r: \begin{cases} 2x + 3y + 2z + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Calcular el plano π, plano perpendicular a la recta r que contiene al punto M:

Como el plano es perpendicular a la recta, el vector director de la recta $\vec{v}_r$ y vector normal al plano $\vec{n}_\pi$ son paralelos, por lo que puede considerarse que coinciden y son iguales a:

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{n}_{\pi} = \vec{v}_r = (3,2,0)$$

Por lo que el plano π es:

$$\pi: 3x + 2y - 20 = 0$$

- Se calcula la recta de máxima pendiente:

La recta de máxima pendiente es la intersección entre el plano π y el plano BDC, es decir, la recta buscada es:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 20 = 0 \\ -2x + 3y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 2

Los puntos A(9,5,0) y B(6,3,3) pertenecen a la recta intersección de dos placas de hormigón simétricas.

- *Definir los planos anteriores sabiendo que su pendiente es 45º*
- *Hallar las intersecciones a esos planos con un plano vertical que contenga a las recta que pasa por los puntos (6,3,z) y (4,5,z) y al plano horizontal*

<u>*Solución*</u>

Se empieza calculando la recta r que contiene a los puntos $A(9,5,0)$ y $B(6,3,3)$. El vector director de esta recta es: $\overrightarrow{AB} = B - A = (6,3,3) - (9,5,0) = (-3,-2,3)$. Y la recta r viene dada por:

$$r\colon \frac{x-9}{-3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-0}{3}$$

Se calculan dos planos que contienen a la recta r:

$$r\colon \begin{cases} \dfrac{x-9}{-3} = \dfrac{y-5}{-2} \\ \dfrac{x-9}{-3} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 33 = 0 \\ x + z - 9 = 0 \end{cases}$$

El haz de planos que contiene a la recta r tiene la siguiente ecaución:

$$(2x - 3y - 33) + \lambda(x + z - 9) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\pi\colon (2+\lambda)x + 3y - \lambda z - 33 - 9\lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector normal de los planos del haz es $\vec{n}_\pi = (2+\lambda, 3, -\lambda)$. Y este es el vector normal de los planos α y β que se están buscando. Por otra parte, se sabe que estos dos planos forman un ángulo de 45° con la horizontal, es decir, con el plano $z = 0$. El vector director de este plano es $\vec{n}_{OXY} = (0,0,1)$. Aplicando la fórmula que proporciona el ángulo formado por dos planos se tiene:

$$\theta = arccos\left(\frac{|\vec{n}_{OXY} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_{OXY}||\vec{n}_\pi|}\right) \Rightarrow cos\theta = \frac{|\vec{n}_{OXY} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_{OXY}||\vec{n}_\pi|} \Rightarrow cos45° = \frac{|-\lambda|}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\lambda^2}{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2} \Rightarrow (2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{13}{4}$$

Uno de los planos viene dado por la siguiente ecuación:

$$\alpha\colon -\frac{5}{4}x + 3y + \frac{13}{4}z - \frac{15}{4} = 0$$

Teniendo en cuenta que los planos son perpendiculares, y que su vector normal es $\vec{n}_\pi = (2 + \lambda, 3, -\lambda)$, se puede calcular el vector normal del plano β:

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Rightarrow= \left(-\frac{5}{4}, 3, \frac{13}{4}\right) \cdot (2+\lambda, 3, -\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{9}{2}\lambda = \frac{13}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{13}{9}$$

Por tanto, el plano β viene dado por la siguiente ecuación:

$$\beta\colon \frac{31}{9}x + 3y - \frac{13}{9}z - \frac{15}{4} = 0$$

Finalmente, se calcula la intersección de los planos α y β con la recta que pasa por los puntos $P(6,3,a)$ y $Q(4,5,a)$. Se define la recta s que pasa por estos dos puntos:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,5,a) - (6,3,a) = (-2,2,0)$. Y la recta r viene dada por:

$$s: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = a \end{cases}$$

Se calcula la intersección de la recta s con el plano α:

$$-\frac{5}{4}(4-2t) + 3(5+2t) + \frac{13}{4}a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow 34t = -25 - 13a \Rightarrow t = \frac{-25-13a}{34}$$

Por lo que la intersección es $S_1\left(\frac{93+13a}{17}, \frac{60-13a}{17}, a\right)$

De similar manera, se calcula la intersección de la recta s con el plano β:

$$\frac{31}{9}(4-2t) + 3(5+2t) - \frac{13}{9}a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow -8t = -\frac{901}{4} + 13a \Rightarrow t = \frac{901-52a}{32}$$

Por lo que la intersección es $S_2\left(\frac{-837+52a}{16}, \frac{981-52a}{16}, a\right)$

EJERCICIO 3

Sean s la recta que pasa por los puntos $B=(9,0,2)$ y $C=(5,4,2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D=(13,4,5)$ y $E=(17,0,1)$. Hallar la ecuación de un plano que equidiste del punto $A=(11,5,8)$ y de la recta s y que sea paralelo a la recta r.

<u>*Solución*</u>

En primer lugar se calculan las ecuaciones paramétricas de las rectas s y r:

$$\overrightarrow{BC}=(-4,4,0)\Rightarrow s\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE}=(4,-4,-4)\Rightarrow r\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

A continuación se halla el plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta s: si π es perpendicular a $s\Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}$ es paralelo a $\overrightarrow{v_s}\Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}=(-1,1,0)$. Por tanto la ecuación de π será

$$\pi\colon -1(x-11)+1(y-5)+0(z-8)\Rightarrow \pi\colon x-y-6=0$$

Ahora se determinan el punto intersección P del plano π con la recta s y el punto medio M del segmento $\overline{AP}$:

$$\begin{cases}x-y-6=0\\ x=9-\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\end{cases}\Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}\Rightarrow P=\left(\frac{15}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

$$M=\frac{A+P}{2}=\frac{(11,5,8)+\left(\frac{15}{2},\frac{3}{2},2\right)}{2}=\left(\frac{37}{4},\frac{13}{4},5\right)$$

Una vez calculado M, se obtiene el plano π' que contiene al punto M y es perpendicular a s: sea $\overrightarrow{v_{\pi'}}=(a,b,c)$ el vector normal al plano π'. Como este plano es perpendicular a s se cumple

$$\overrightarrow{v_{\pi'}}\cdot\overrightarrow{v_s}=0\Rightarrow (a,b,c)\cdot(-1,1,0)=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b\ \ \forall c\Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}}=(a,a,c)$$

El plano π' es paralelo a $r\Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow (a,a,c)\cdot(1,-1,-1)\Rightarrow a-a-c=0)\Rightarrow c=0$

Por tanto, el vector normal al plano π' es $\overrightarrow{v_{\pi'}}=(a,a,0)$, por ejemplo se toma $\overrightarrow{v_{\pi'}}=(1,1,0)$.

Para finalizar se calcula la ecuación del plano π' a partir de su vector normal y el punto M:

$$\pi'\colon 1\left(x-\frac{37}{4}\right)+1\left(y-\frac{13}{4}\right)+0(z-5)\Rightarrow x+y-\frac{50}{4}=0$$