$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (3,2,0)$$

Por lo que el plano π es:

$$\pi: 3x + 2y - 20 = 0$$

- Se calcula la recta de máxima pendiente:

La recta de máxima pendiente es la intersección entre el plano π y el plano BDC, es decir, la recta buscada es:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 20 = 0 \\ -2x + 3y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2

Los puntos A(9,5,0) y B(6,3,3) pertenecen a la recta intersección de dos placas de hormigón simétricas.

- *Definir los planos anteriores sabiendo que su pendiente es 45º*
- *Hallar las intersecciones a esos planos con un plano vertical que contenga a las recta que pasa por los puntos (6,3,z) y (4,5,z) y al plano horizontal*

<u>Solución</u>

Se empieza calculando la recta r que contiene a los puntos $A(9,5,0)$ y $B(6,3,3)$. El vector director de esta recta es: $\overrightarrow{AB} = B - A = (6,3,3) - (9,5,0) = (-3,-2,3)$. Y la recta r viene dada por:

$$r: \frac{x-9}{-3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-0}{3}$$

Se calculan dos planos que contienen a la recta r:

$$r: \begin{cases} \dfrac{x-9}{-3} = \dfrac{y-5}{-2} \\ \dfrac{x-9}{-3} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 33 = 0 \\ x + z - 9 = 0 \end{cases}$$

El haz de planos que contiene a la recta r tiene la siguiente ecaución:

$$(2x - 3y - 33) + \lambda(x + z - 9) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\pi: (2+\lambda)x + 3y - \lambda z - 33 - 9\lambda = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector normal de los planos del haz es $\vec{n}_\pi = (2+\lambda, 3, -\lambda)$. Y este es el vector normal de los planos α y β que se están buscando. Por otra parte, se sabe que estos dos planos forman un ángulo de 45° con la horizontal, es decir, con el plano $z = 0$. El vector director de este plano es $\vec{n}_{OXY} = (0,0,1)$. Aplicando la fórmula que proporciona el ángulo formado por dos planos se tiene:

$$\theta = arccos\left(\frac{|\vec{n}_{OXY} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_{OXY}||\vec{n}_\pi|}\right) \Rightarrow cos\theta = \frac{|\vec{n}_{OXY} \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_{OXY}||\vec{n}_\pi|} \Rightarrow cos45° = \frac{|-\lambda|}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\lambda^2}{(2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2} \Rightarrow (2+\lambda)^2 + \lambda^2 + 3^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow \lambda = -\frac{13}{4}$$

Uno de los planos viene dado por la siguiente ecuación:

$$\alpha: -\frac{5}{4}x + 3y + \frac{13}{4}z - \frac{15}{4} = 0$$

Teniendo en cuenta que los planos son perpendiculares, y que su vector normal es $\vec{n}_\pi = (2 + \lambda, 3, -\lambda)$, se puede calcular el vector normal del plano β:

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Rightarrow = \left(-\frac{5}{4}, 3, \frac{13}{4}\right) \cdot (2+\lambda, 3, -\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{9}{2}\lambda = \frac{13}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{13}{9}$$

Por tanto, el plano β viene dado por la siguiente ecuación:

$$\beta: \frac{31}{9}x + 3y - \frac{13}{9}z - \frac{15}{4} = 0$$

Finalmente, se calcula la intersección de los planos α y β con la recta que pasa por los puntos $P(6,3,a)$ y $Q(4,5,a)$. Se define la recta s que pasa por estos dos puntos:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,5,a) - (6,3,a) = (-2,2,0)$. Y la recta r viene dada por:

$$s: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = a \end{cases}$$

Se calcula la intersección de la recta s con el plano α:

$$-\frac{5}{4}(4-2t) + 3(5+2t) + \frac{13}{4}a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow 34t = -25 - 13a \Rightarrow t = \frac{-25-13a}{34}$$

Por lo que la intersección es $S_1\left(\frac{93+13a}{17}, \frac{60-13a}{17}, a\right)$

De similar manera, se calcula la intersección de la recta s con el plano β:

$$\frac{31}{9}(4-2t) + 3(5+2t) - \frac{13}{9}a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow -8t = -\frac{901}{4} + 13a \Rightarrow t = \frac{901-52a}{32}$$

Por lo que la intersección es $S_2\left(\frac{-837+52a}{16}, \frac{981-52a}{16}, a\right)$

EJERCICIO 3

Sean s la recta que pasa por los puntos $B=(9,0,2)$ y $C=(5,4,2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D=(13,4,5)$ y $E=(17,0,1)$. Hallar la ecuación de un plano que equidiste del punto $A=(11,5,8)$ y de la recta s y que sea paralelo a la recta r.

<u>*Solución*</u>

En primer lugar se calculan las ecuaciones paramétricas de las rectas s y r:

$$\overrightarrow{BC}=(-4,4,0)\Rightarrow s:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE}=(4,-4,-4)\Rightarrow r:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

A continuación se halla el plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta s: si π es perpendicular a $s\Rightarrow\overrightarrow{n_\pi}$ es paralelo a $\overrightarrow{v_s}\Rightarrow\overrightarrow{n_\pi}=(-1,1,0)$. Por tanto la ecuación de π será

$$\pi:-1(x-11)+1(y-5)+0(z-8)\Rightarrow\pi:x-y-6=0$$

Ahora se determinan el punto intersección P del plano π con la recta s y el punto medio M del segmento $\overline{AP}$:

$$\begin{cases}x-y-6=0\\x=9-\lambda\\y=\lambda\\z=2\end{cases}\Rightarrow\lambda=\frac{3}{2}\Rightarrow P=\left(\frac{15}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

$$M=\frac{A+P}{2}=\frac{(11,5,8)+\left(\frac{15}{2},\frac{3}{2},2\right)}{2}=\left(\frac{37}{4},\frac{13}{4},5\right)$$

Una vez calculado M, se obtiene el plano π' que contiene al punto M y es perpendicular a s: sea $\overrightarrow{v_{\pi'}}=(a,b,c)$ el vector normal al plano π'. Como este plano es perpendicular a s se cumple

$$\overrightarrow{v_{\pi'}}\cdot\overrightarrow{v_s}=0\Rightarrow(a,b,c)\cdot(-1,1,0)=0\Rightarrow-a+b=0\Rightarrow a=b\ \ \forall c\Rightarrow\overrightarrow{v_{\pi'}}=(a,a,c)$$

El plano π' es paralelo a $r\Rightarrow\overrightarrow{v_{\pi'}}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow(a,a,c)\cdot(1,-1,-1)\Rightarrow a-a-c=0)\Rightarrow c=0$

Por tanto, el vector normal al plano π' es $\overrightarrow{v_{\pi'}}=(a,a,0)$, por ejemplo se toma $\overrightarrow{v_{\pi'}}=(1,1,0)$.

Para finalizar se calcula la ecuación del plano π' a partir de su vector normal y el punto M:

$$\pi':1\left(x-\frac{37}{4}\right)+1\left(y-\frac{13}{4}\right)+0(z-5)\Rightarrow x+y-\frac{50}{4}=0$$