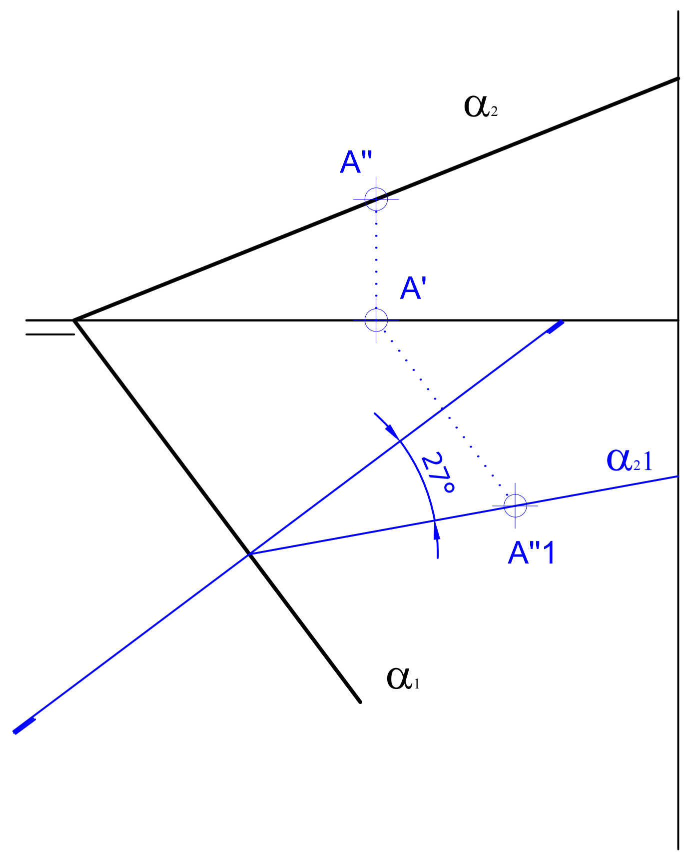
EJERCICIO 1

Hallar el ángulo que forma el plano $\alpha: 4x + 3y + 10z = 32$ *y el plano* $\beta: z = 0$

Hallar el ángulo que forman el plano α y el PH.



Este ejercicio se ha resuelto por cambios de plano poniendo el plano proyectante vertical.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 1

Hallar el ángulo que forma el plano $\alpha: 4x+3y+10z=32$ *y el plano* $\beta: z=0$

Solución

Los vectores normales de los planos son los siguientes: $\vec{n}_\alpha=(4,3,10)$ y $\vec{n}_\beta=(0,0,1)$. El ángulo θ que forman los dos planos viene dado por la siguiente expresión:

$$\theta = arccos\left(\frac{\left|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta\right|}{|\vec{n}_\alpha|\left|\vec{n}_\beta\right|}\right)\Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{|4\cdot 0+2\cdot 0+10\cdot 1|}{\sqrt{4^2+3^2+10^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\right)\text{arccos}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

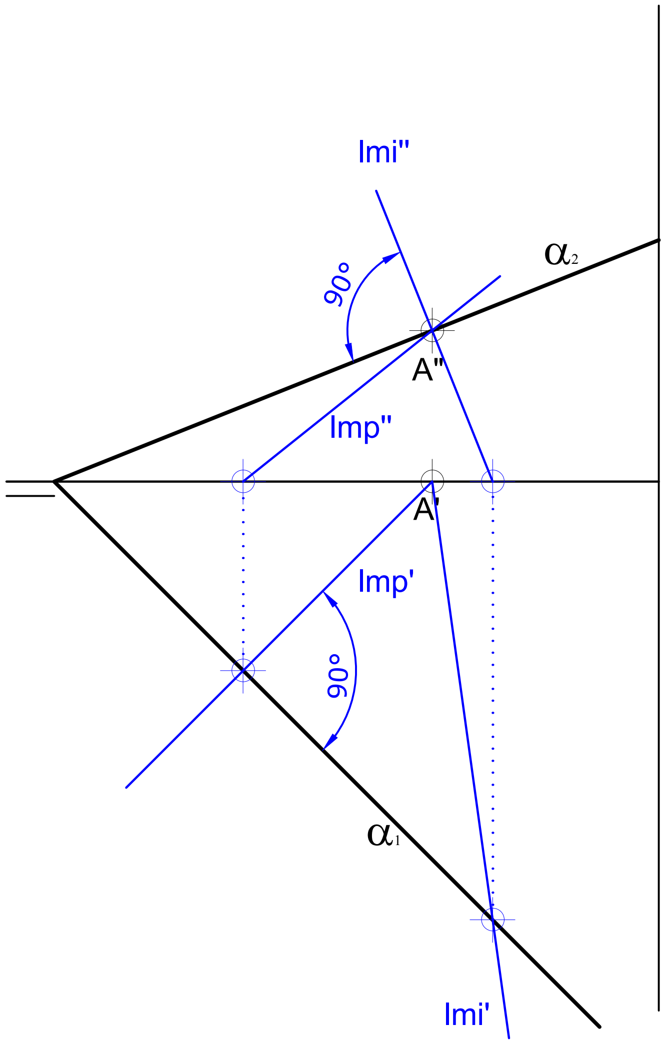
$$\theta = 26{,}5650°$$

OpenCourseWare
CC BY NC SA

EJERCICIO 2

Calcular las rectas de máxima pendiente y de máxima inclinación del plano $\alpha: 2x + 2y + 5z = 16$ *en el punto* $A = (3,0,2)$.

Trazar por A la lmp y lmi del plano α.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 2

Calcular las rectas de máxima pendiente y de máxima inclinación del plano $\alpha: 2x+2y+5z=16$ *en el punto* $A=(3,0,2)$.

<u>*Solución*</u>

Para calcular la recta de máxima pendiente del plano α en el punto A, se siguen los siguientes pasos:

- Hallar la recta r intersección del plano α con el plano XOY

$$r:\begin{cases} 2x+2y+5z=16 \\ z=0 \end{cases}$$

- Calcular el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A

  Si el plano buscado es perpendicular a la recta r, su vector asociado será paralelo al vector director de r. Se calcula el vector director de r:

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}=(2,-2,0)$$

  Ahora se halla el plano π cuyo vector asociado es $\overrightarrow{n_\pi}=(2,-2,0)$ y que pasa por el punto $A=(3,0,2)$

$$\pi: 2(x-3)-2(y-0)+0(z-2)=0 \Rightarrow \pi: x-y-3=0$$

- La recta de máxima pendiente es la intersección de los planos α y π:

$$\begin{cases} 2x+2y+5z=16 \\ x-y=3 \end{cases}$$

El cálculo de la recta de máxima inclinación del plano α en el punto A se hace de forma similar al de la recta de máxima pendiente, variando únicamente el primero de los pasos:

- Hallar la recta s intersección del plano α con el plano XOZ

$$s:\begin{cases} 2x+2y+5z=16 \\ y=0 \end{cases}$$

- Calcular el plano β perpendicular a la recta s que pasa por el punto A

  Si el plano buscado es perpendicular a la recta s, su vector asociado será paralelo al vector director de s. Se calcula el vector director de s:

$$\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5\vec{\imath}+2\vec{k}=(-5,0,2)$$

  Se halla el plano β cuyo vector asociado es $\overrightarrow{n_\beta}=(-5,0,2)$ y que pasa por el punto $A=(3,0,2)$

$$\beta: -5(x-3)+0(y-0)+2(z-2)=0 \Rightarrow \pi: 5x-2z-11=0$$

EJERCICIO 2

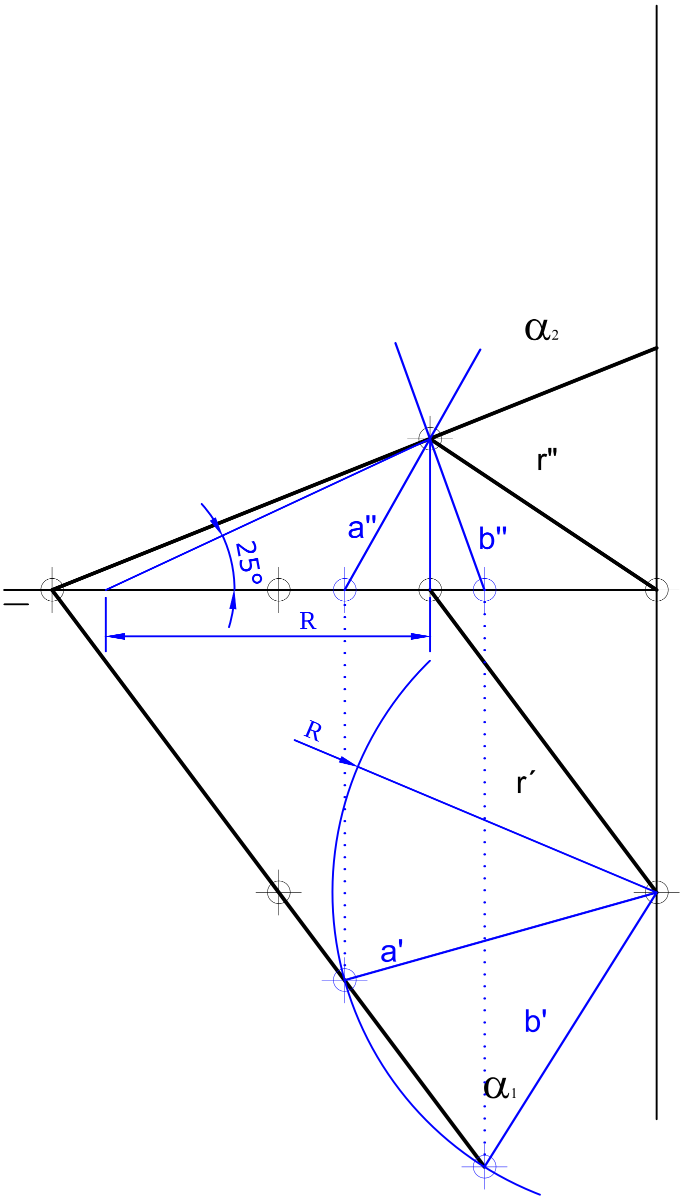
- La recta de máxima inclinación es la intersección de los planos α y β:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = 16 \\ 5x - 2x = 11 \end{cases}$$

EJERCICIO 3

Dibujar las rectas que cortan a la recta $r: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$ *y están contenidas en el plano que pasa por los puntos* $(8,0,0), (3,0,2)$ *y (5,4,0) y forma* 25° *grados con el plano XOY.*

Dibujar las rectas que corten a la recta r, estén contenidas en el plano α y formen 25º con PH.



OCW OpenCourseWare
cc BY NC SA

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 3

Dibujar las rectas que cortan a la recta $r: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}$ *y están contenidas en el plano que pasa por los puntos* $(8,0,0), (3,0,2)$ *y (5,4,0) y forma* 25° *grados con el plano XOY.*

<u>Solución</u>

Se calcula el plano π que pasa por los puntos $A(8,0,0)$, $B(3,0,2)$ y $C(5,4,0)$. Para ello se necesitan dos vectores no paralelos. Se toman por ejemplo los siguientes vectores:

- $\overrightarrow{AB} = (3,0,2) - (8,0,0) = (-5,0,2)$
- $\overrightarrow{BC} = (5,4,0) - (3,0,2) = (2,4,-2)$

El plano π viene dado por:

$$\begin{vmatrix} x-8 & -5 & 2 \\ y & 0 & 4 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 4x + 3y + 10z - 32 = 0$$

Se busca una recta que corte a la recta r, que esté contenida en el plano π y que forme un ángulo de 25° con el plano XOY. El plano OXY tiene la ecuación $z = 0$, siendo su vector normal $\vec{n} = (0,0,1)$.

Sea $\vec{v}_s = (a,b,c)$ el vector director de la recta que se busca y $\vec{n}_\pi = (4,3,10)$ el vector normal del plano π. Como la recta que se busca está contenida en el plano se cumple $\vec{v}_s \perp \vec{n}$:

$$\vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow 4a + 3b + 10c = 0 \Rightarrow c = -\frac{4a+3b}{10}$$

Por lo que el vector director de la recta que se busca es $\vec{v}_s = (a, b, -\frac{4a+3b}{10})$.

Por otra parte, el ángulo que forman la recta buscada y el plano tiene que ser 25°:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v}_s \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_s||\vec{n}|} \Rightarrow \sin 25^\circ = \frac{\left|-\frac{4a+3b}{10}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2}} \Rightarrow 0{,}42 = \frac{\left|-\frac{4a+3b}{10}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$0{,}42^2 = \frac{\left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2}{a^2 + b^2 + \left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2} \Rightarrow 0{,}1764\left(a^2 + b^2 + \left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2\right) = \left(\frac{4a+3b}{10}\right)^2 \Rightarrow$$

$$0{,}1764(100a^2 + 100b^2 + (4a+3b)^2) = (4a+3b)^2 \Rightarrow$$

$$3{,}8224a^2 - 19.7666ab + 9{,}5876b^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{19.7666b \pm \sqrt{(19.7666b)^2 - 4 \cdot 3{,}8224 \cdot 9{,}5876b^2}}{2 \cdot 3{,}8224} = \begin{cases} 0{,}5418b \\ 4{,}6292b \end{cases}$$

EJERCICIO 3

Hay dos rectas que cumplen estos requisitos y el vector director de cada una de ellas es: $\vec{v}_{s1} = (0{,}5418b, b, -\frac{4\cdot 0{,}5418b+3b}{10})$ o $\vec{v}_{s2} = (4{,}6292b, b, -\frac{4\cdot 4{,}6292b+3b}{10})$.

Además la recta que se busca tiene que cortarse con la recta r, por lo que es necesario calcular el punto de corte de ambas rectas para que quede la recta totalmente definida. Además, este punto de corte entre la recta r y la recta buscada será el punto de corte de la recta r con el plano π. Un punto genérico de la recta r tiene la forma: $P(3\lambda, 4-4\lambda, 2\lambda)$. Se calcula el punto de corte entre la recta r y el plano π:

$$4\cdot 3\lambda + 3\cdot(4-4\lambda) + 10\cdot 2\lambda - 32 = 0 \Rightarrow 20\lambda - 20 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Y e punto de corte es $Q(3{,}0{,}2)$.

Y las rectas que se buscan son:

$$s1: \begin{cases} x = 3 + 0{,}5418\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 0{,}51672\lambda \end{cases}$$

$$s2: \begin{cases} x = 3 + 4{,}6292\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2{,}1516\lambda \end{cases}$$