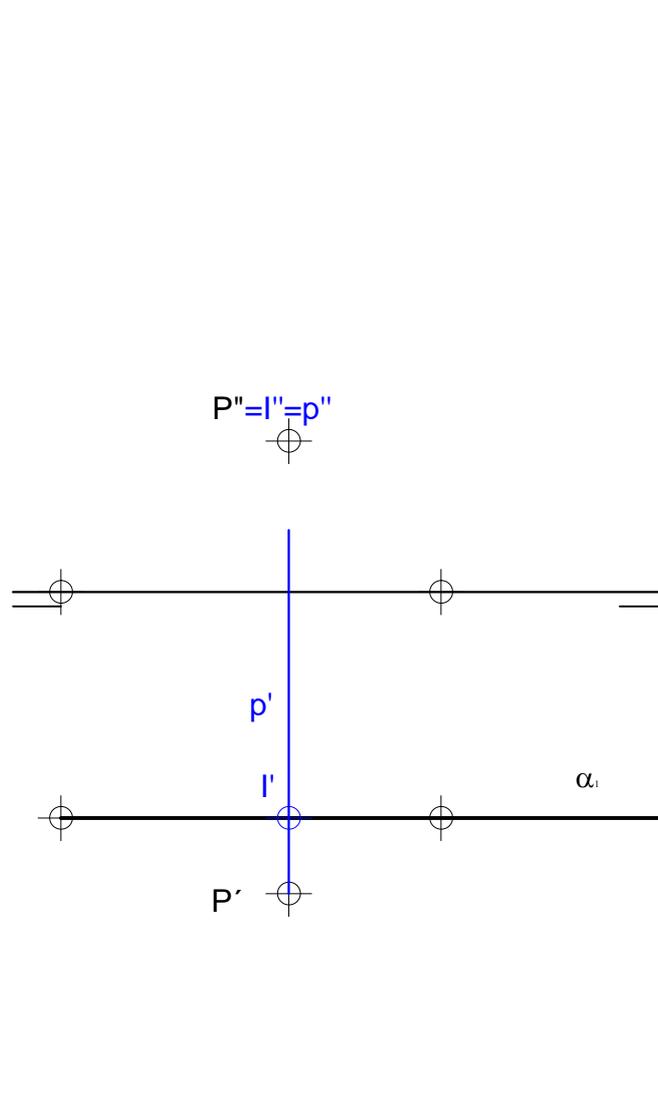


EJERCICIO 1

Trazar por el punto $P = (5,3,2)$ una recta perpendicular al plano que contiene a los puntos $(7,0,0)$ y $(4,3,0)$ y es perpendicular al plano XOY . Hallar su punto de intersección.

Trazar por el punto P una recta p perpendicular a α . Hallar el punto I de intersección de ambos.



EJERCICIO 1

Trazar por el punto $P = (5,3,2)$ una recta perpendicular al plano que contiene a los puntos $(7,0,0)$ y $(4,3,0)$ y es perpendicular al plano XOY . Hallar su punto de intersección.

Solución:

Se calcula la ecuación implícita del plano α , plano que contiene los puntos $(7,0,0)$ y $(4,3,0)$, utilizando para ello un punto y dos vectores pertenecientes al mismo.

Por ejemplo, el vector $\vec{u} = (7,0,0) - (4,3,0) = (3,-3,0)$ es un vector del plano, además, como α es perpendicular al plano XOY , el vector $(0,0,1)$ también pertenece a dicho plano. Por lo que la ecuación implícita de α se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-7 & 0 & 3 \\ y & 0 & -3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha: x + y = 7$$

De esta ecuación se puede determinar $\vec{n} = (1,1,0)$ que el vector normal al plano.

Por otro lado, la recta r que se desea obtener es perpendicular al plano α por lo que el vector director de la misma será $\vec{n} = (1,1,0)$. Además, como se sabe que la recta pasa por el punto $P = (5,3,2)$ se calculan las ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = y - 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

Se calcula la intersección pedida:

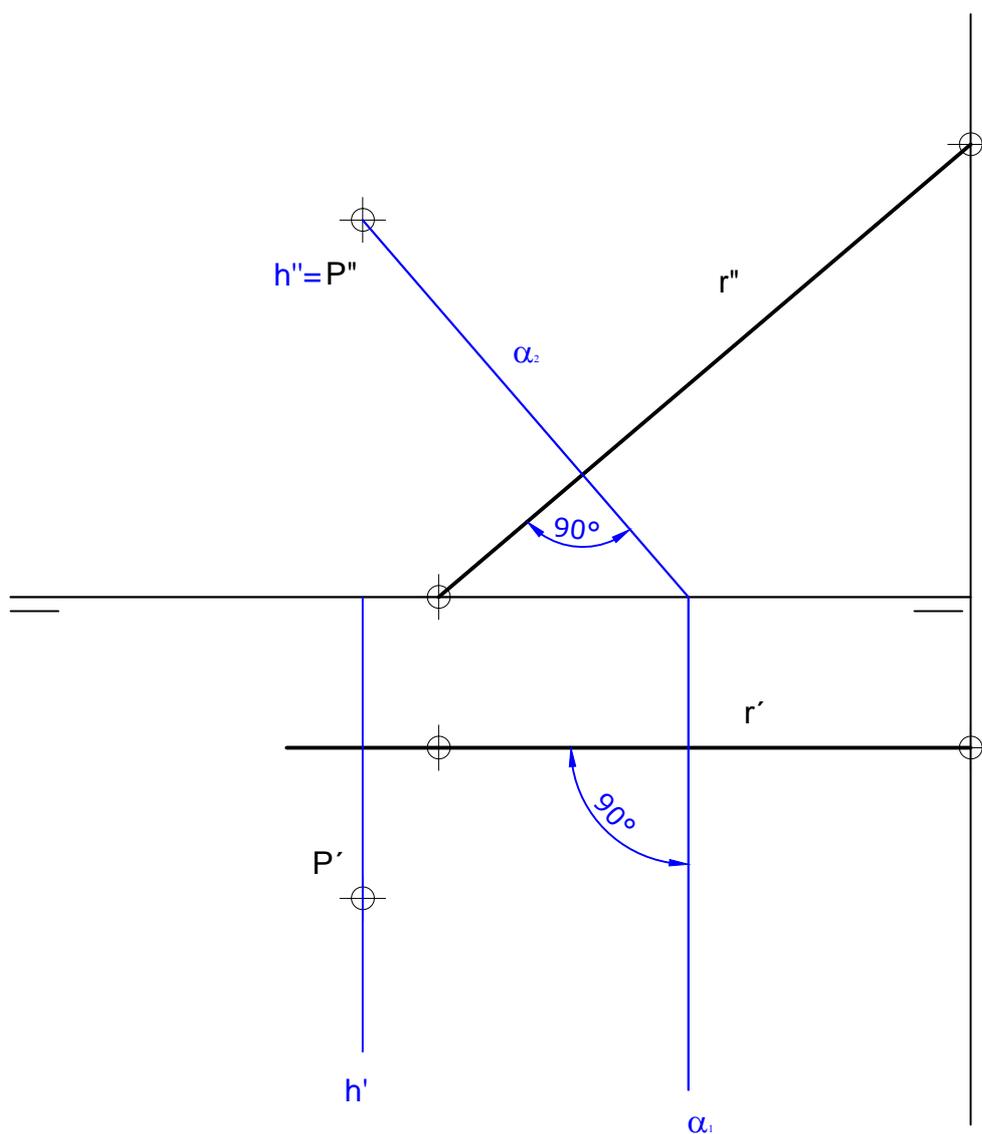
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

La intersección entre la recta r y el plano α es el punto $\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$

EJERCICIO 2

Trazar por $P(8,5,4)$ un plano perpendicular a la recta que contiene a los puntos $(7,2,0)$ y $(0,2,6)$. Hallar su punto de intersección.

Trazar por el punto P un plano α perpendicular a r. Hallar el punto I de intersección de ambos.



EJERCICIO 2

Trazar por $P(8,5,4)$ un plano perpendicular a la recta que contiene a los puntos $(7,2,0)$ y $(0,2,6)$. Hallar su punto de intersección.

Solución

Sea r la recta que contiene los puntos dados. El vector director de esta recta es: $\vec{v}_r = (7,2,0) - (0,2,6) = (7,0,-6)$.

El vector normal del plano π será paralelo al vector director de la recta r :

$$\vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi = (7,0,-6)$$

Por lo que $\pi: 7x + 0y - 6z + k = 0$.

Se determina el parámetro k , exigiendo que el plano π contenga el punto $P(8,5,4)$:

$$7 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = -32$$

El plano π viene dado por la siguiente ecuación:

$$\pi: 7x - 6z - 32 = 0$$

Para calcular la intersección con la recta r con el plano π , se escriben las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r: \begin{cases} x = 7 + 7\lambda \\ y = 2 \\ z = -6\lambda \end{cases}$$

Se plantea $r \cap \pi$, sustituyendo un punto genérico $(x, y, z) \in r$ en el plano:

$$7(7 + 7\lambda) + 36\lambda - 32 = 0 \Rightarrow 49 + 49\lambda + 36\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Y el punto de corte resulta: $Q\left(\frac{28}{5}, 2, \frac{42}{5}\right)$.

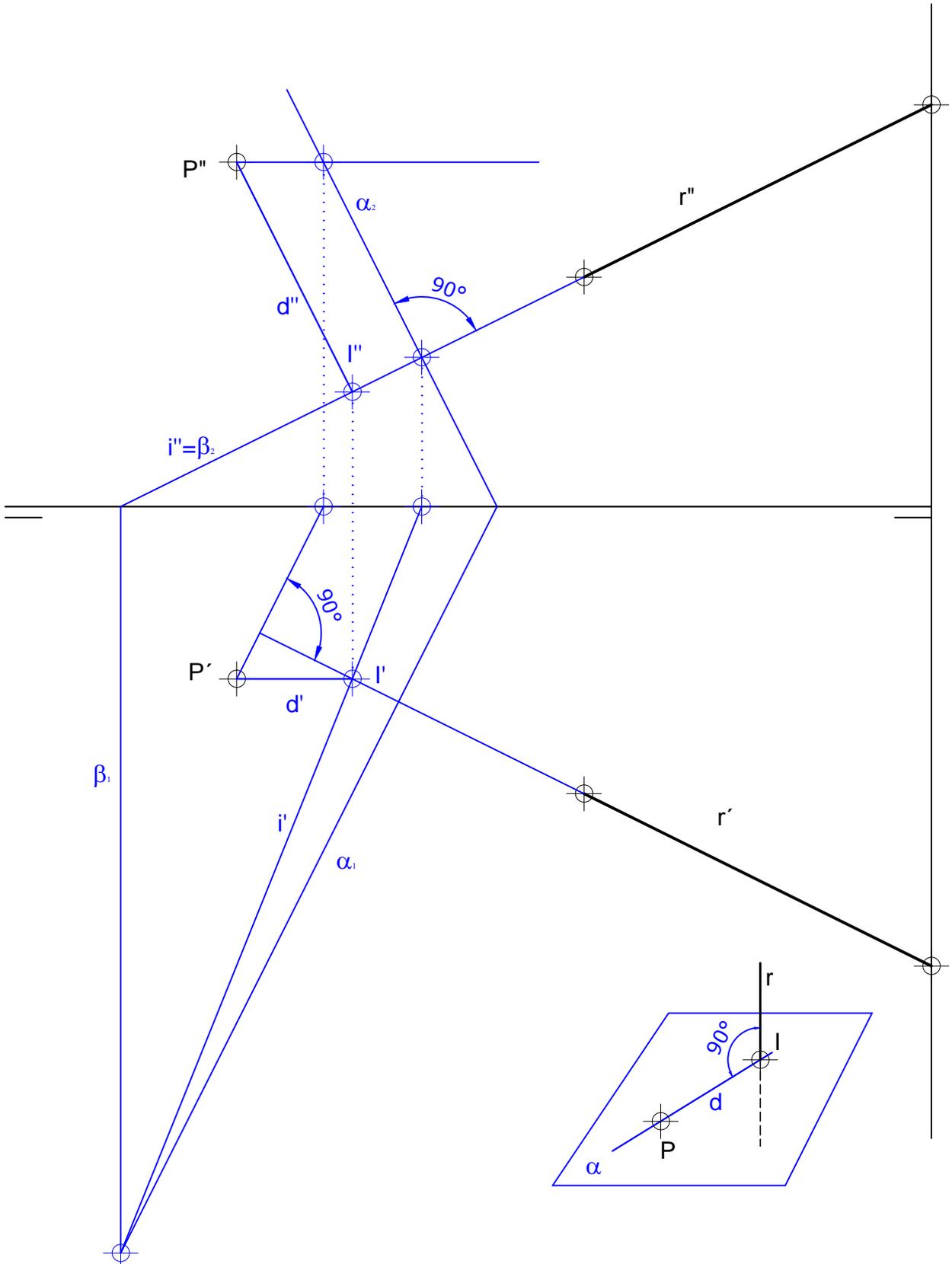


ÒRÒÛÔÔΩÁΗ

Calcular una recta que pasando por el punto $P = (12,3,6)$, corte y sea perpendicular a la recta

$r: \frac{x-6}{-6} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{3}$. Hallar también el punto de intersección entre ambas.

Trazar por P una recta que corte y sea perpendicular a r. Hallar el punto de intersección entre ambas.



Calcular una recta que pasando por el punto $P = (12,3,6)$, corte y sea perpendicular a la recta

$$r: \frac{x-6}{-6} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{3}. \text{ Hallar también el punto de intersección entre ambas.}$$

Solución

Se define el plano π que pasa por el punto P y cuyo vector asociado o normal es el vector director de la recta r :

$$\pi: -6(x - 12) + 3(y - 3) + 3(z - 6) = 0 \Rightarrow \pi: -2x + y + z + 15 = 0$$

A partir de la ecuación continua de la recta se obtienen sus ecuaciones paramétricas:

$$\frac{x - 6}{-6} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z - 4}{3} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - 6\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano, se calcula el punto Q , intersección entre el plano π y la recta r :

$$-2(6 - 6\lambda) + 1(5 + 3\lambda) + 1(4 + 3\lambda) + 15 = 0 \Rightarrow \lambda = -2/3$$

$$\begin{cases} x = 6 - 6(-2/3) \\ y = 5 + 3(-2/3) \\ z = 4 + 3(-2/3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow Q = (10,3,2)$$

La perpendicular solicitada es la recta que pasa por los puntos P y Q :

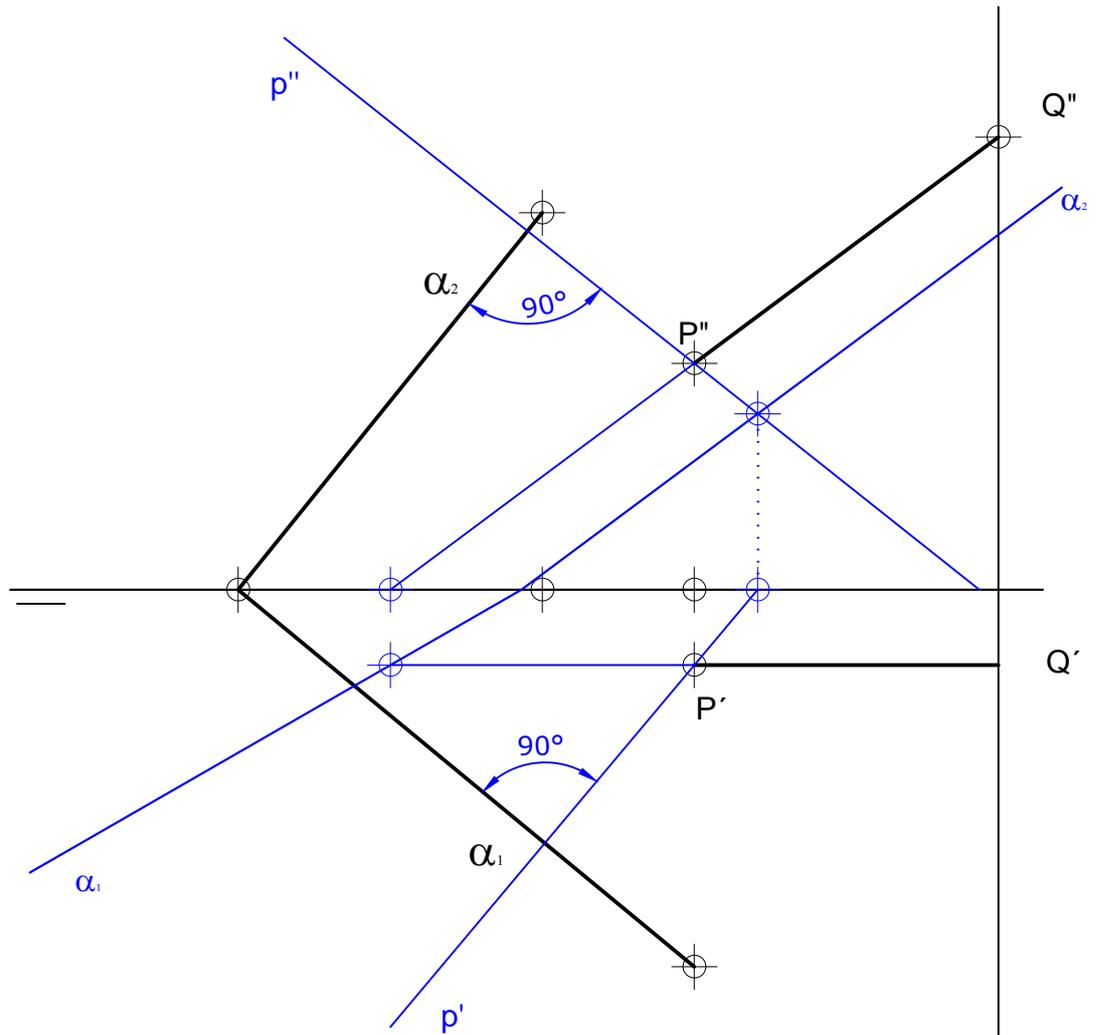
$$p: \begin{cases} y = 3 \\ 2x - z = 18 \end{cases}$$



EJERCICIO 4

Trazar por $r(P(4,1,3), Q(0,1,6))$ planos perpendiculares a $\alpha((10,0,0), (6,0,5), (4,5,0))$.

Trazar por P y Q planos perpendiculares a α .



EJERCICIO 4

Trazar por $r(P(4,1,3), Q(0,1,6))$ planos perpendiculares a $\alpha((10,0,0), (6,0,5), (4,5,0))$.

Solución:

Para trazar por la recta r planos perpendiculares al plano α se deben realizar los siguientes pasos:

- Calcular la ecuación de la recta r :

Utilizando el punto Q y el vector director $\vec{u} = Q - P = (-4,0,3)$, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r: \begin{cases} x = 0 - 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 6 + 3\lambda \end{cases}$$

Siendo su ecuación implícita:

$$\begin{cases} \frac{x}{-4} = \frac{z-6}{3} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 3x - 4z = 24 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Calcular el haz de planos que contiene a la recta r :

Los planos que contienen la recta r tienen la expresión

$$(y - 1) + \lambda(3x + 4z - 24) = 0 \Rightarrow 3\lambda x + y + 4\lambda z - 24\lambda - 1 = 0$$

- Calcular el vector normal al plano α :

Multiplicando dos vectores directores del plano vectorialmente, por ejemplo, multiplicando los vectores, $(6,0,5) - (10,0,0) = (-4,0,5)$ y $(4,5,0) - (10,0,0) = (-6,5,0)$ se obtiene que:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 5 \\ -6 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 30\vec{j} - 20\vec{k}$$

Por lo que el vector normal al plano α es $\vec{n} = (5,6,4)$.

- Calcular los planos perpendiculares a α que contiene la recta r :

Si los planos deben ser perpendiculares a α , el vector asociado a ellos debe ser perpendicular a \vec{n}_α , es decir: