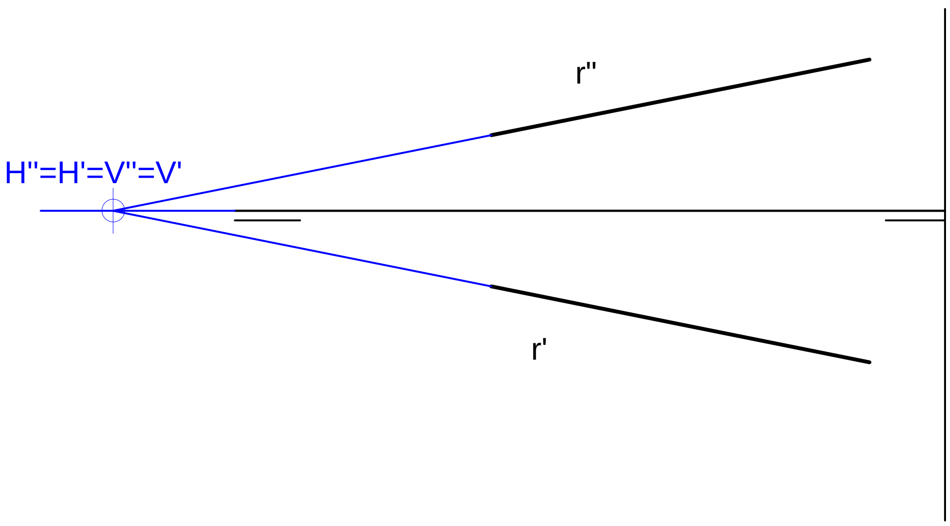
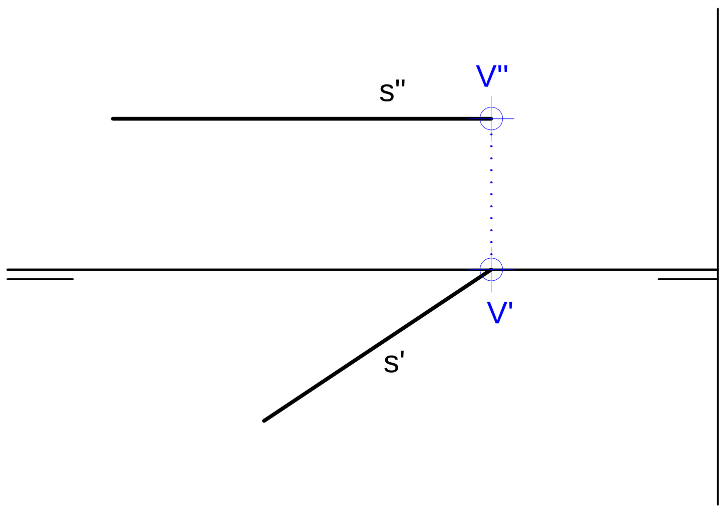
EJERCICIO 1

Determinar la intersección de las rectas $r\colon\begin{cases} x+3y=13 \\ y=z \end{cases}$ *y* $s\colon\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ *con los planos* XOY *y* XOZ.

Determinar las trazas de las rectas r y s.





NO TIENE TRAZA HORIZONTAL PORQUE ES PARALELA AL PH

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 1

Determinar la intersección de las rectas $r: \begin{cases} x+3y=13 \\ y=z \end{cases}$ *y* $s: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *con los planos* XOY *e* XOZ.

<u>*Solución:*</u>

Para calcular la intersección de una recta con un plano basta resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano considerados. A continuación se obtienen cada una de las intersecciones pedidas:

- Intersección de la recta r con el plano XOY:

$$\begin{cases} x+3y=13 \\ y=z \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

La intersección entre la recta r y el plano XOY es el punto $(13,0,0)$.

- Intersección de la recta r con el plano XOZ:

$$\begin{cases} x+3y=13 \\ y=z \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

La intersección entre la recta r y el plano XOZ es el punto $(13,0,0)$.

- Intersección de la recta s con el plano XOY*:*

Para calcular esta intersección se deben obtener las ecuaciones implícitas de la recta s:

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3+3\mu \\ y=2\mu \\ z=2 \end{cases}$$

Despejando el parámetro μ de las dos primeras ecuaciones e igualando ambos términos

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x-6=3y$$

Por tanto, la recta s se puede representar como $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ z=2 \end{cases}$.

Por lo que la intersección entre la recta s y el plano XOY se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

EJERCICIO 1

$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ z=2 \\ z=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ El sistema anterior es incompatible, por lo que no existe intersección entre la recta y el plano $\Rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.

- Intersección de la recta s con el plano XOZ:

De forma análoga, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y el plano:

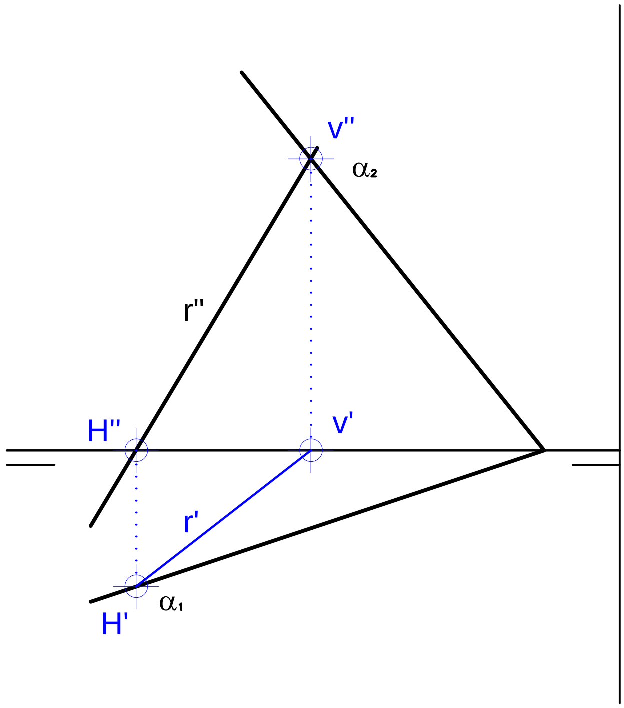
$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ z=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

La intersección entre la recta s y el plano XOZ es el punto $(3,0,2)$.

EJERCICIO 2

Determinar los parámetros a *y* b *para que la recta que pasa por los puntos* $(4, a, 4)$ *y* $(7, b, -1)$ *esté contenida en el plano* α: $10x - 30y - 8z = 10$.

Hallar la proyección horizontal de r de forma que esté contenida en α.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 2

Determinar el valor de los parámetros reales a *y* b *para que la recta que pasa por los puntos (4,a,4) y (7,b,-1) esté contenida en el plano* α: $10x - 30y - 8z = 10$

Solución

La recta que pasa por los puntos $A(4, a, 4)$ y $B(7, b, -1)$ estará contenida en el plano α si los puntos A y B están en el plano α.

Se plantea la condición para que el punto $A(4, a, 4)$ esté en el plano:

$$10 \cdot 4 - 30a - 8 \cdot 4 = 10 \Rightarrow -30a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{15}$$

Se plantea la condición para que el punto $B(7, b, -1)$ esté en el plano:

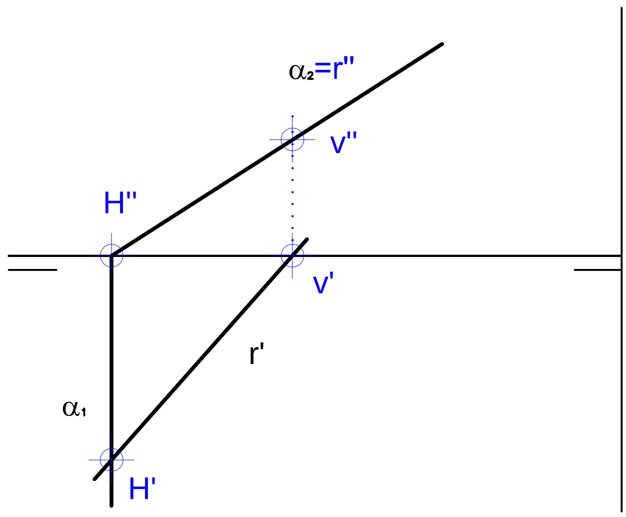
$$10 \cdot 7 - 30b + 8 = 10 \Rightarrow -30b = -68 \Rightarrow b = \frac{34}{15}$$

La recta que pasa por los puntos $A(4, a, 4)$ y $B(7, b, -1)$ estará contenida en el plano α cuando $a = -\frac{1}{15}$ y $b = \frac{34}{15}$.

EJERCICIO 3

Determinar los parámetros a y b para que la recta r: $\begin{cases} 3x - 3y - 12 = 0 \\ y(b-a) - 3z + 3a = 0 \end{cases}$ *esté contenida en el plano que contiene a los puntos* $P = (6,0,0),\ Q = (2,0,2)$ *y* $R = (6,3,0)$.

Hallar la proyección vertical de r de forma que esté contenida en α.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 3

Determinar el valor de los parámetros reales a y b para que la recta r: $\begin{cases} 3x-3y-12=0 \\ y(b-a)-3z+3a=0 \end{cases}$ *esté contenida en el plano que contiene a los puntos* $P=(6,0,0)$, $Q=(2,0,2)$ *y* $R=(6,3,0)$.

<u>*Solución*</u>

Se calcula el plano π que contiene a los puntos P, Q y R, para lo cual es necesario obtener dos vectores del mismo, por ejemplo $\overrightarrow{PQ}=(-4,0,2)$ y $\overrightarrow{PR}=(0,3,0)$, y a partir de ellos se determina la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-6 & -4 & 0 \\ y & 0 & 3 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-6)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6(x-6)-12z=0$$

$$\pi: x+2z-6=0$$

Se forma el sistema de ecuaciones lineales $r \cap \pi$: $\begin{cases} 3x-3y-12=0 \\ y(b-a)-3z+3a=0 \\ x+2z-6=0 \end{cases}$ en el que se consideran la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada M' siguientes:

$$(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & b-a & -3 & 3a \\ 1 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Para que la recta r esté contenida en el plano π se debe cumplir que $rg(M)=rg(M')=2<$ nº de incógnitas $=3$.

El rango de la matriz M al menos es 2 ya que $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Para que $rg(M)=rg(M')=2$ es necesario hacer nulos los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & b-a & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b-2a+3=0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 0 & b-a & 3a \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b+a=0$$

Con ambas ecuaciones se forma el sistema $\begin{cases} 2b-2a+3=0 \\ 2b+a=0 \end{cases}$ cuya solución es $a=1$ y $b=-\frac{1}{2}$.

A partir de estos valores se puede hallar la ecuación de la recta r que es

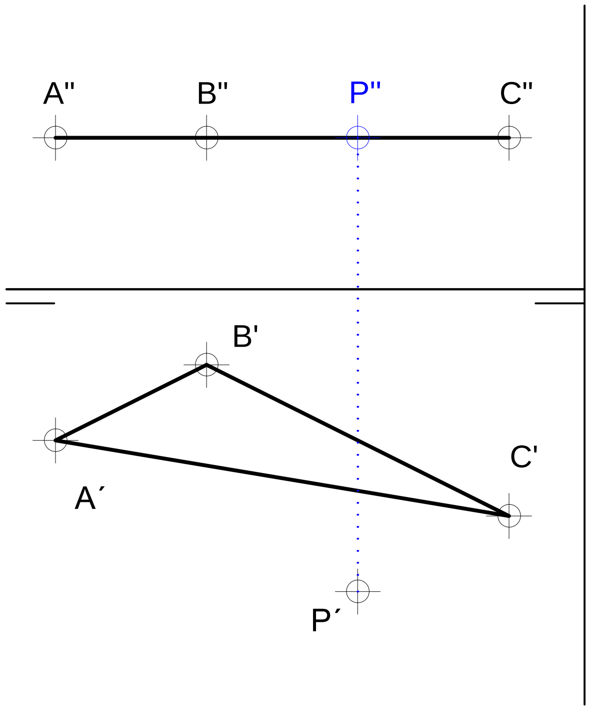
$$r: \begin{cases} 3x-3y-12=0 \\ -\frac{3}{2}y-3z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ y+6z=6 \end{cases}$$

EJERCICIO 4

Determinar la coordenada z del punto $P = (3,4,z)$ para que esté contenido en el plano

$$\alpha\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la proyección vertical del punto P de forma que esté contenido en el plano ABC.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 4

Determinar la coordenada z *del punto* $P = (3,4,z)$ *para que esté contenido en el plano* $\alpha\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Solución:</u>

Para que el punto $P = (3,4,z)$ pertenezca al plano α, P debe satisfacer las ecuaciones del plano, es decir, el siguiente sistema debe ser compatible:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 1 + 6\lambda + 2\mu \\ 4 = 3 - \lambda + \mu \\ \mathrm{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda + \mu \\ 1 = -\lambda + \mu \\ \mathrm{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \\ \mathrm{z} = 2 \end{cases}$$

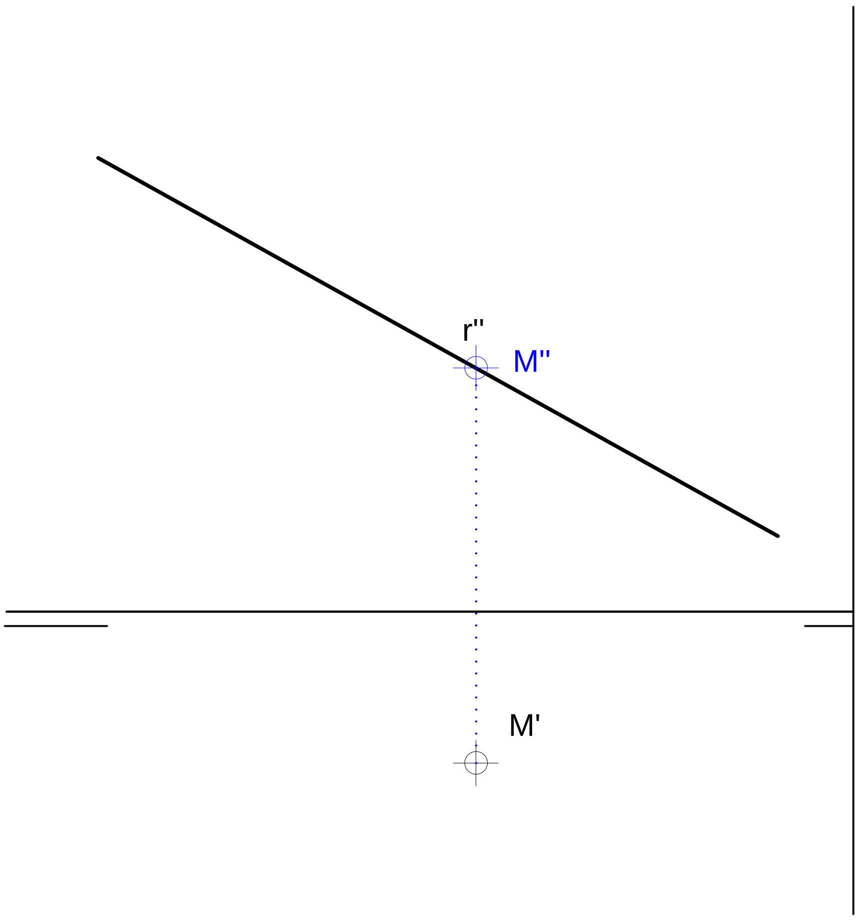
La coordenada $z = 2$, es decir, el punto P que pertenece al plano α es $(3,4,2)$.

EJERCICIO 5

Hallar los parámetros a y b para que la recta r que pasa por los puntos $Q = (10, a, 6)$ y $R = (1, b, 1)$ sea paralela al plano XOZ.

1. *Calcular la coordenada z del punto $M = (5,2,z)$ para que pertenezca a la recta r.*
2. *Calcular las coordenadas x e y del punto $P = (x, y, 5)$ para que pertenezca a la recta r.*

Hallar la proyección vertical del punto M de forma que esté contenido en r. Dibujar la proyección horizontal de r para que sea paralela al plano vertical. Determinar las proyecciones del punto P de cota 5 para que pertenezca a r.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 5

Hallar los parámetros a y b para que la recta r que pasa por los puntos Q=(10,a,6) y R=(1,b,1) sea paralela al plano XOZ.

1. *Calcular la coordenada z del punto M=(5,2,z) para que pertenezca a la recta r*
2. *Calcular las coordenadas x e y del punto P=(x,y,5) para que pertenezca a la recta r*

<u>Solución</u>

Se calcula el vector director de la recta r: $\vec{v}_r = \overrightarrow{QR} = R - Q = (-9, b-a, -5)$. Si la recta r tiene que ser paralela al plano OXZ, $\vec{v}_r$ tendrá que ser perpendicular al vector normal del plano OXZ. Lo que significa que el producto escalar de ambos vectores será 0:

$$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

Como $\vec{n}_\pi = (0,1,0)$, el producto escalar resulta:

$$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} \cdot \vec{\mathrm{n}}_\pi = 0 \Rightarrow = (-9, \mathrm{b}-\mathrm{a}, -5) \cdot (0,1,0) = \mathrm{b}-\mathrm{a} = 0 \Rightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b}$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

1.- El punto $M = (5,2,z)$ pertenecerá a la recta r, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que M verifique las ecuaciones paramétricas de la recta. Se plantean las igualdades de las componentes:

$$\text{Si } M \in r, \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 1 - 9\lambda \\ 2 = b \\ z = 1 - 5\lambda \end{cases} \Rightarrow b = 2, \lambda = -\frac{4}{9}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en el punto M, se tiene que $M = (5,2,\frac{29}{9})$.

2.- De similar manera, el punto $P = (x, y, 5)$ pertenecerá a la recta r, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que P verifique las ecuaciones paramétricas de la recta. Se plantean las igualdades de las componentes:

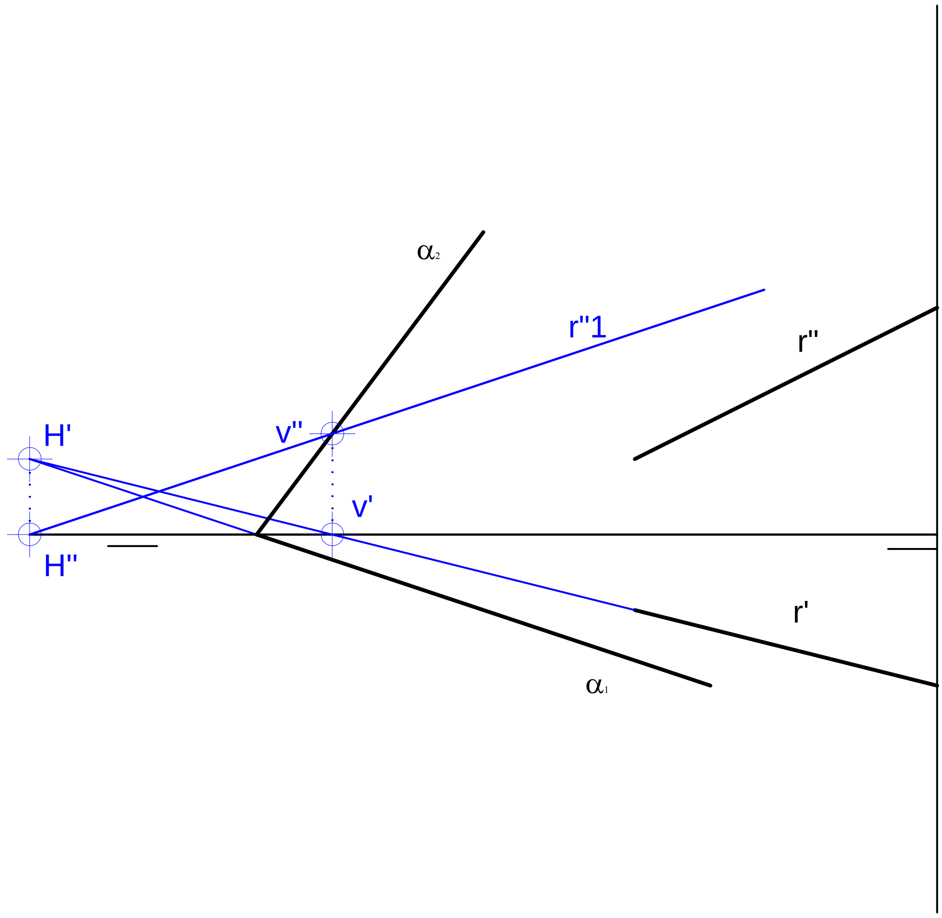
$$\text{Si } P \in r, \exists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 9\lambda \\ y = b \\ 5 = 1 - 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{5}$$

Sustituyendo $\lambda = -\frac{4}{5}$ en el punto P, se tiene que $P = (\frac{41}{5}, b, 5)$ para $\forall b \in \mathbb{R}$ pertenece a la recta r.

EJERCICIO 6

Determinar la posición relativa entre la recta $r: \frac{x}{-4} = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ *y el plano* α *del que se conoce un punto* $P = (3,2,0)$ *y su vector normal* $\vec{n} = (4,12,3)$.

Determinar la posición relativa entre la recta r y el plano α.



La recta r no pertenece al plano ni es paralela a él por lo tanto intersectan.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 6

Determinar la posición relativa entre la recta $r: \frac{x}{-4} = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ *y el plano* α *del que se conoce un punto* $P = (3,2,0)$ *y su vector asociado* $\vec{a} = (4,12,3)$.

<u>*Solución*</u>

A partir de las ecuaciones en forma continua de la recta r, se determinan sus ecuaciones implícitas:

$$r: \begin{cases} \dfrac{x}{-4} = y - 2 \\ \dfrac{x}{-4} = \dfrac{z-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8 = 0 \\ x + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Con el punto P y el vector asociado $\vec{a}$ se determina la ecuación implícita del plano:

$$\alpha: 4(x-3) + 12(y-2) + 3(z-0) = 0 \Rightarrow 4x + 12y + 3z - 36 = 0$$

Para estudiar la posición relativa de r y α, se forma el sistema de ecuaciones $r \cap \alpha$:

$$\begin{cases} x + 4y - 8 = 0 \\ x + 2z - 6 = 0 \\ 4x + 12y + 3z - 36 = 0 \end{cases}$$

en el que se consideran la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada M' siguientes:

$$(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 12 & 3 & 36 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 12 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3 = rg(M') =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ el sistema $r \cap \alpha$ es compatible determinado, con lo que la recta y el punto se cortan en un único punto.

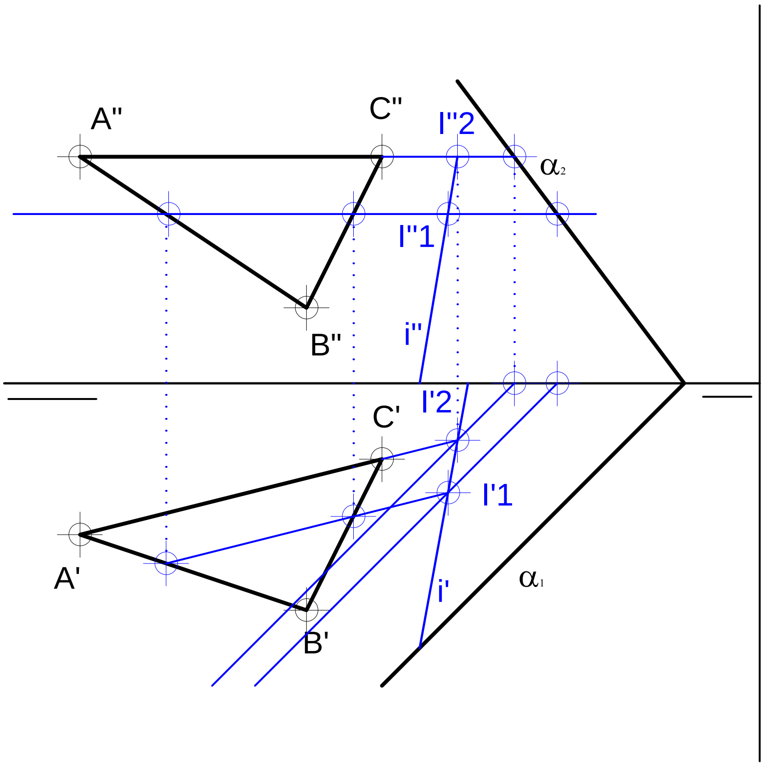
Resolviendo el sistema $r \cap \alpha$, se obtiene el punto intersección $I = (-6,7/2,6)$.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 7

Hallar la intersección entre el plano β que contiene a los puntos $A = (9,2,3)$, $B = (6,3,1)$ y $C = (5,1,3)$ y el plano $\alpha: 4x - 4y - 3z = 4$.

Hallar la intersección entre el plano ABC y el plano α.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 7

Hallar la intersección entre el plano β que contiene a los puntos $A = (9,2,3)$, $B = (6,3,1)$ y $C = (5,1,3)$ y el plano α: $4x - 4y - 3z = 4$.

Solución:

Se determina la ecuación formal del plano β utilizando un punto perteneciente $A = (9,2,3)$ y $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ el vector normal al mismo.

Se calculan los vectores directores del plano $\vec{u} = B - A = (-3,1,-2)$ y $\vec{v} = C - B = (-1,-2,2)$, y se obtiene el vector normal como producto vectorial de los dos vectores directores:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 7\vec{k}$$

De modo que la ecuación formal del plano β es:

$$-2(x-9) + 8(y-2) + 7(z-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\beta: -2x + 8y + 7z - 19 = 0$$

Para hallar la intersección entre ambos planos se resuelve el sistema formado por las ecuaciones formales de α y β:

$\begin{cases} -2x + 8y + 7z = 19 \\ 4x - 4y - 3z = 4 \end{cases}$, siendo la matriz de coeficientes M y la matriz ampliada M'

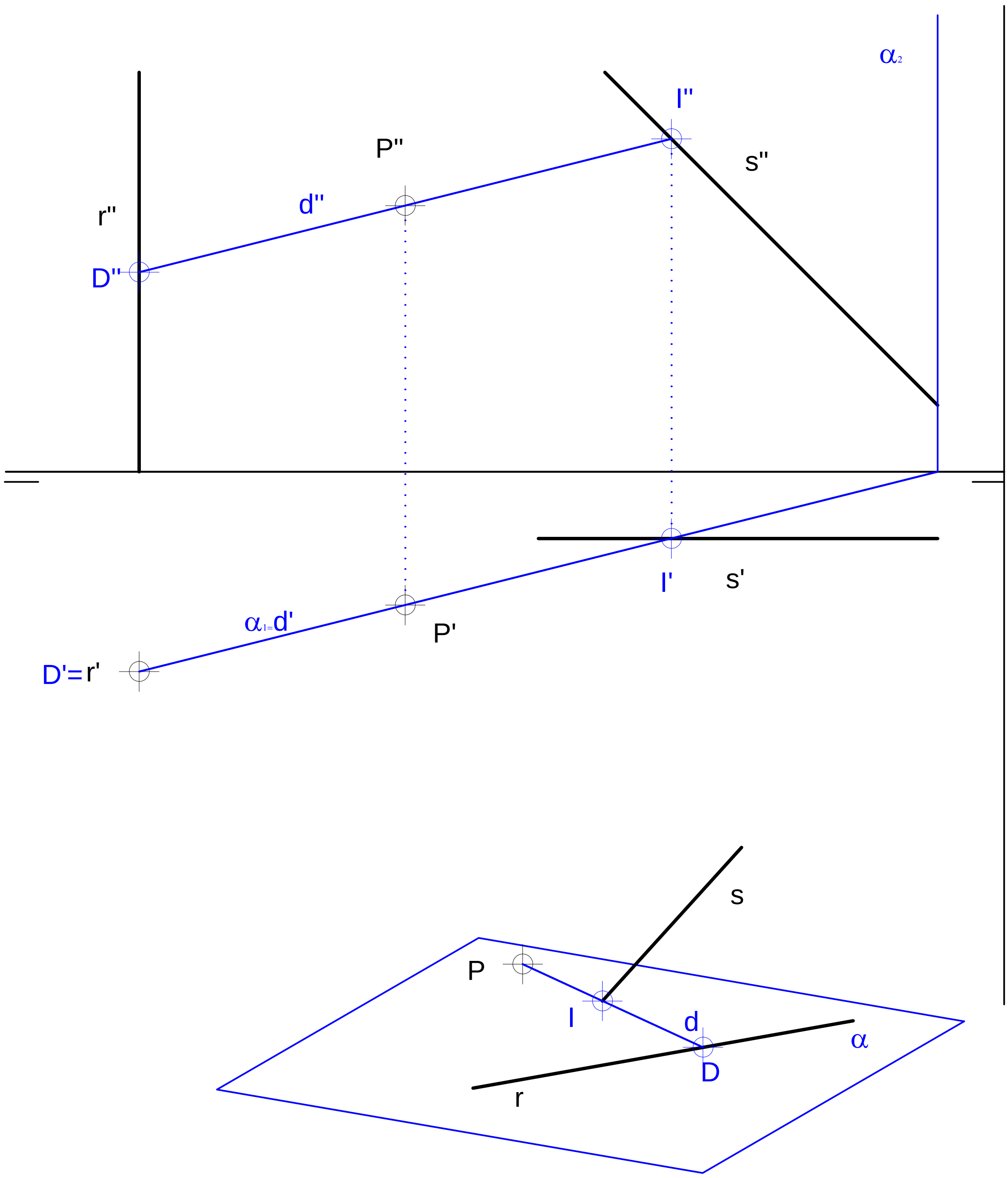
$$(M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 8 & 7 & 19 \\ 4 & -4 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz M es dos ya que $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(M) = rg\left(M'\right) = 2 < 3 = n^{\underline{o}}\ de\ incognitas$ $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, siendo la intersección una recta, cuya ecuación implícita $\begin{cases} -2x + 8y + 7z - 19 = 0 \\ 4x - 4y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$.

EJERCICIO 8

Determinar las rectas que contengan al punto $P = (9,2,4)$ *y corten a la recta* r *que contiene a los puntos* $(13,3,3)$ *y* $(13,3,0)$ *y a la recta* s *que contiene a los puntos* $(6,1,6)$ *y* $(1,1,1)$.

Dibujar las rectas que contengan al punto P y corten a las rectas r y s.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 8

Determinar las rectas que contengan al punto P=(9,2,4) y corten a la recta r que contiene a los puntos (13,3,3) y (13,3,0) y a la recta s que contiene a los puntos (6,1,6) y (1,1,1).

<u>*Solución*</u>

Se calcula el plano π que contiene a la recta r y que pasa por el punto $P(9,2,4)$. Para ello se necesitan dos vectores no paralelos. Se toman por ejemplo los siguientes vectores:

- Vector director de la recta r: $\vec{v}_r = (13,3,3) - (13,3,0) = (0,0,3)$.
- Vector $\vec{v}_{p1} = (13,3,3) - (9,2,4) = (4,1,-1)$

El plano π viene dado por:

$$\pi: \begin{cases} x = 9 + 4\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 4 + 3\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-9 & 0 & 4 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -3x + 12y + 3 = 0$$

De similar manera se calcula el plano π' que contiene a la recta s y que pasa por el punto $P(9,2,4)$. Para ello se necesitan dos vectores no paralelos. Se toman por ejemplo los siguientes vectores:

- Vector director de la recta s: $\vec{v}_r = (6,1,6) - (1,1,1) = (5,0,5)$.
- Vector $\vec{v}_{p2} = (6,1,6) - (9,2,4) = (-3,-1,2)$

El plano π' viene dado por:

$$\pi': \begin{cases} x = 9 + 5\lambda - 3\mu \\ y = 2 - \mu \\ z = 4 + 5\lambda + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-9 & 5 & -3 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z-4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi': x - 5y - z + 5 = 0$$

Las rectas que contengan al punto P y que contengan a las rectas r y s, vienen dadas como intersección de los planos π y π' ($\pi \cap \pi'$):

$$\begin{cases} -3x + 12y + 3 = 0 \\ x - 5y - z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 12y = -3 \\ x - 5y = z - 5 \end{cases}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado: $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3$

Y la solución del sistema es la siguiente recta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ z-5 & -5 \end{vmatrix}}{3} = 25 - 4z$$

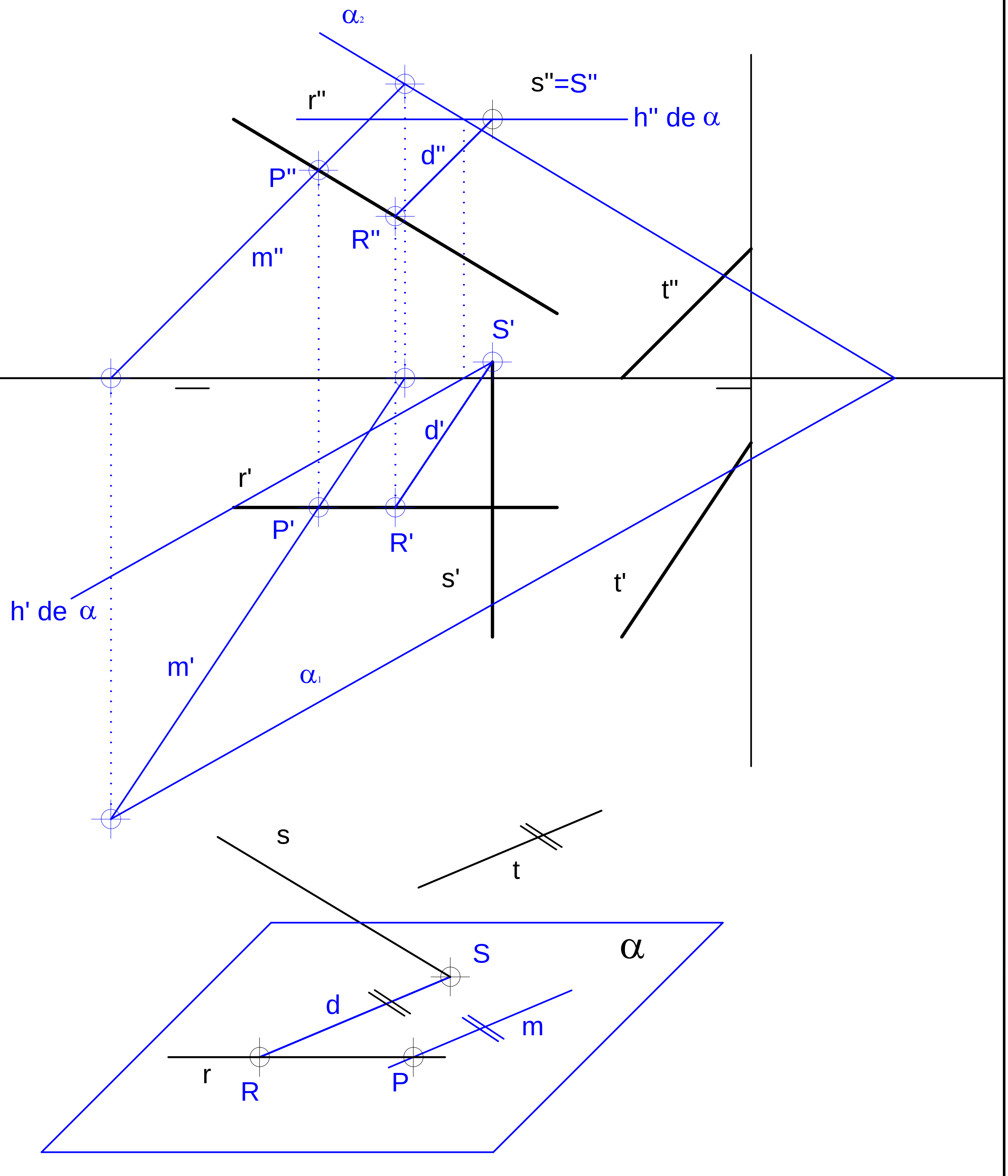
$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & z-5 \end{vmatrix}}{3} = -z + 6$$

$$r: \begin{cases} x = 25 - 4z \\ y = -z + 6 \\ z = z \end{cases}$$

EJERCICIO 9

Determinar las rectas que cortan a la recta r: $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ *y a la recta* s: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ *y son paralelas a la recta* t: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

Dibujar las rectas que corten a las rectas r y s y sean paralelas a t.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Incharbe

EJERCICIO 9

Determinar las rectas que cortan a la recta r: $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ *y a la recta* s: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ *y son paralelas a la recta* t: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

<u>Solución</u>

Si las rectas buscadas son paralelas a la recta t, sus vectores directores serán paralelos al vector director de $t, \overrightarrow{v_t} = (2,3,-2)$. Por tanto, el vector director de las rectas buscadas es $(2,3,-2)$.

Por otra parte, se obtienen un punto genérico de la recta r y otro de la recta s convirtiendo las ecuaciones de las rectas de su forma continua a paramétrica:

$$r: \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \left(\tfrac{14}{3}, 2, \lambda\right) \text{ es un punto genérico de } r$$

$$s: \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow B = (4, \mu, 4) \text{ es un punto genérico de } s$$

Para que una recta corte a las rectas r y s, debe pasar por un punto de r y otro de s. Por ello, se calcula la recta que pasa por los puntos A y B:

$$\frac{x-4}{4-14/3} = \frac{y-\mu}{\mu-2} = \frac{z-4}{4-\lambda} \Rightarrow \frac{x-4}{-2/3} = \frac{y-\mu}{\mu-2} = \frac{z-4}{4-\lambda}$$

El vector director de esta recta es $\left(-\frac{2}{3}, \mu - 2, 4 - \lambda\right)$ que debe ser paralelo al vector $(2,3,-2)$. Haciendo que ambos vectores sean paralelos se tiene que:

$$\frac{-2/3}{2} = \frac{\mu-2}{3} = \frac{4-\lambda}{-2} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{10}{3} \text{ y } \mu = 1$$

Sustituyendo estos valores en la recta buscada se obtiene

$$\frac{x-4}{-2/3} = \frac{y-1}{1-2} = \frac{z-4}{4-\frac{10}{3}} \Rightarrow \frac{x-4}{-2/3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{2/3} = \delta$$

O lo que es lo mismo, las ecuaciones paramétricas de las rectas solución son:

$$\begin{cases} x = 4 - \dfrac{2}{3}\delta \\ y = 1 - \delta \\ z = 4 + \dfrac{2}{3}\delta \end{cases}$$