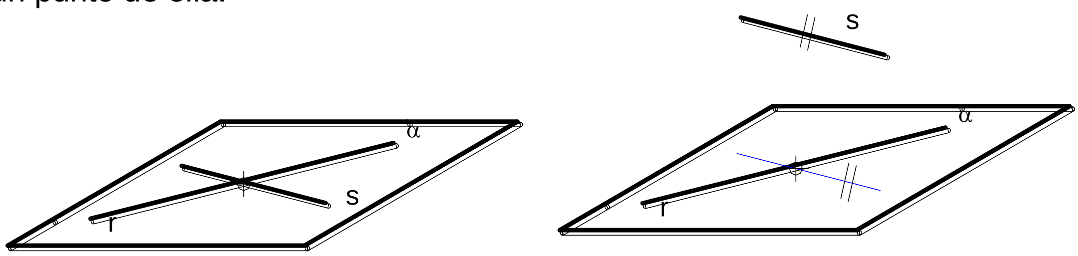
TEMA VI: ÁNGULOS ENTRE ELEMENTOS

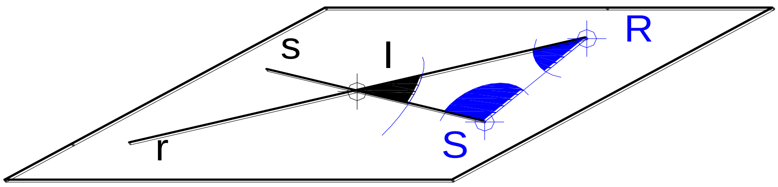
6.1.D – Ángulo entre dos rectas

El cálculo del ángulo de dos rectas que se cortan es sencillo. Si las rectas se cruzan, el ángulo es el formado entre una de las rectas y la paralela a la otra por un punto de ella.



Existen varios procedimientos para calcular el ángulo entre dos rectas en los sistemas de proyección ortogonal.

Desde el punto de vista estrictamente geométrico se puede resolver hallando los ángulos de un triángulo **RIS** calculando la longitud de sus lados: **R** es un punto cualquiera de la recta **r**, **S** es un punto cualquiera de la recta **s** e **I** es el punto de intersección entre ambas.

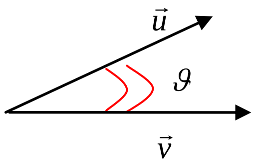


Desde el punto de vista de la geometría descriptiva, la resolución del problema se basa en conseguir que el plano formado por las dos rectas tenga una posición favorable para que de forma directa se observe ese ángulo. Los procedimientos son tres:

1) Abatimientos
2) Cambios de plano
3) Giros

6.1.A – Ángulo entre dos rectas

Se recuerda que el ángulo entre dos vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$



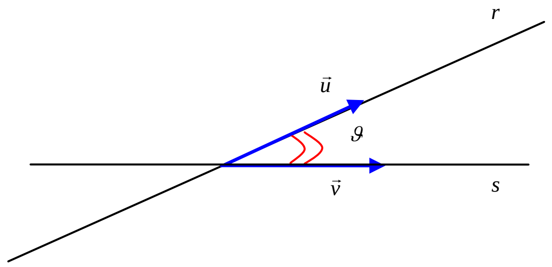
Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

se calcula utilizando la expresión $\vartheta = arcos\ \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

La posición relativa entre dos rectas en el espacio puede ser: coincidentes, paralelas, secantes o pueden cruzarse. Según esas posiciones se tiene:

- Rectas secantes: si dos rectas se cortan, determinan cuatro ángulos iguales dos a dos. El menor de estos ángulos se denomina ángulo entre las dos rectas.
- Rectas que se cruzan: el ángulo entre ellas es el menor de los ángulos formado por la paralela a una de ella que corta a la otra.
- Rectas coincidentes o paralelas: forman un ángulo de 0º.

El ángulo que forman dos rectas coincide con el ángulo que forman sus vectores directores si el ángulo es agudo o con su suplementario si es obtuso.



Por tanto, dadas la recta r cuyo vector director es el vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y la recta s cuyo vector director es el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el ángulo que forman ambas rectas se calcula utilizando la fórmula:

$$\vartheta = arcos\ \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = arccos \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} + \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}}$$

sabiendo que si éste es obtuso, se utiliza el ángulo suplementario donde

$$cos(180 - \vartheta) = -\cos\ \vartheta$$

Como caso particular, las rectas r y s son perpendiculares si $\cos \vartheta = 0 \Rightarrow$

si $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

6.1. Ejemplos comunes a ambas materias

► ***Ejemplo 38 (A)***

Hallar el ángulo que forman las rectas $r: \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2y = z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + 3z = 10 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$

Solución: A partir de dos puntos cualesquiera de la rectas r y s se forman sus vectores directores:

$A = (1,0,0)$ y $B = (4,1,2)$ dos puntos de $r \Rightarrow \vec{u} = (3,1,2)$ es un vector director de r.
$C = (4,1,2)$ y $D = (1,1,3)$ dos puntos de $s \Rightarrow \vec{v} = (-3,0,1)$ es un vector director de s.

Aplicando la fórmula $\vartheta = arcos\, \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$ se tiene:

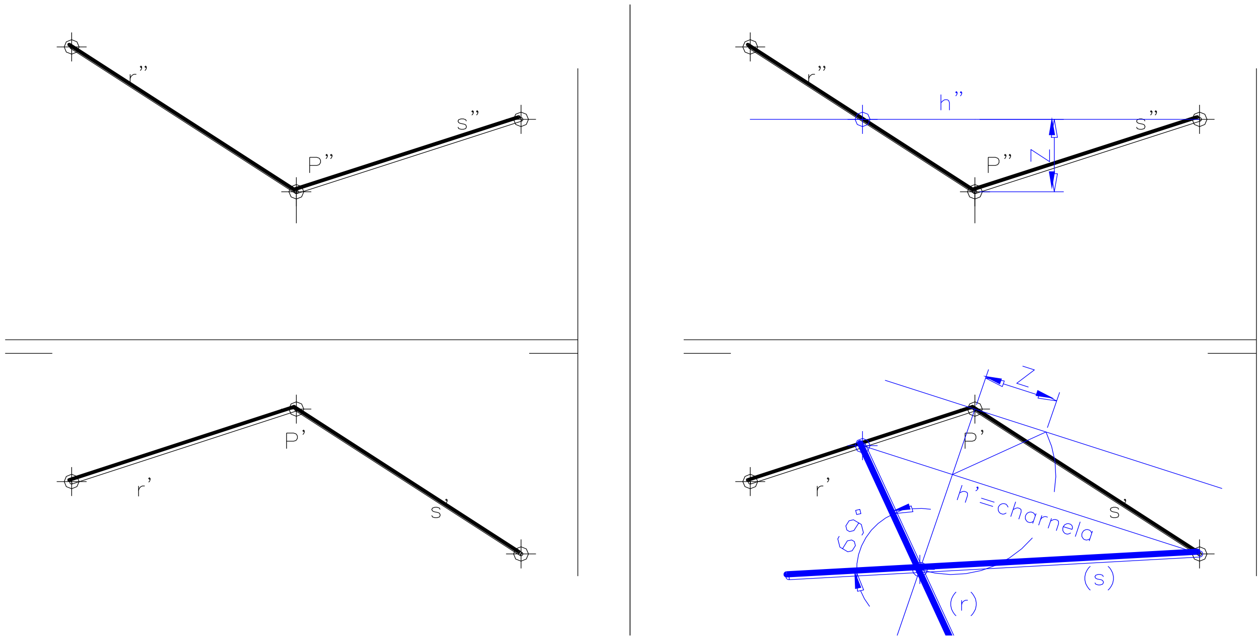
$$\vartheta = arcos \frac{|(3,1,2).(3,-2,-1)|}{\sqrt{9+1+4}\,.\sqrt{9+4+1}} = arcos \frac{|9-2-2|}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = arcos \frac{5}{14} = arcos\ 0{,}3771 \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = 69{,}08°}$$

► ***Ejemplo 38 (D)***

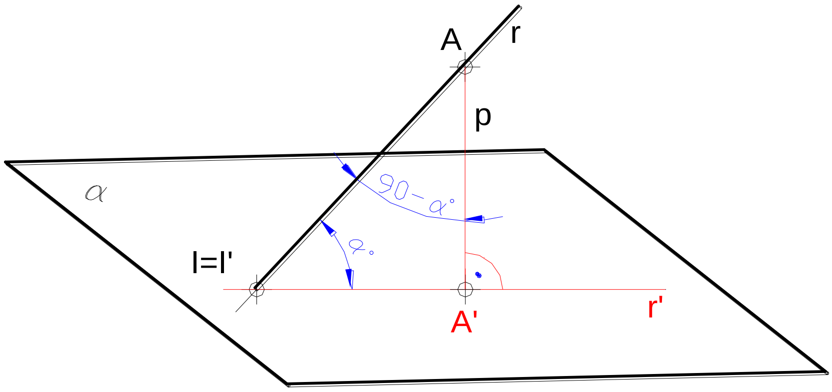
Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución: Las rectas se cortan por lo tanto definen un plano. Para hallar el ángulo se abaten las dos rectas. En este caso se ha elegido la horizontal h como charnela.



6.2.D – Ángulo entre recta y plano

Se define el ángulo entre una recta y un plano como el ángulo que forman la recta y la proyección ortogonal de la misma con el plano. Como se observa en la figura, este ángulo es el complementario del que forman la recta y la perpendicular al plano por un punto. De esta forma el problema se reduce al caso anterior.



6.2.A – Ángulo entre recta y plano

Las posiciones que pueden adoptar una recta y un plano en el espacio son: que la recta esté contenida en el plano, que sea paralela a él o que se corten. Según esas posiciones se tiene que:

- Si la recta y el plano son secantes: el ángulo entre ellos es el ángulo que forma la recta con su proyección ortogonal sobre el plano (que es la recta intersección del plano con un plano perpendicular al dado y que contiene a la recta).
- Si la recta está contenida en el plano o es paralela a él: forman un ángulo de 0°.

El ángulo ϑ que forman la recta r y el plano π es el complementario del ángulo que forma la recta r con una recta s perpendicular al plano.

El ángulo entre las rectas r y s coincide con el formado por el vector director de la recta r y el vector normal al plano π si el ángulo es agudo o con su suplementario si es obtuso.

Por tanto, dado una recta r cuyo vector director es el vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y un plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ cuyo vector normal es $\vec{n}$, el ángulo que forman ambos planos se calculará utilizando a la fórmula

$$\vartheta = ang(r,\pi) = arcsen\,\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = arccos\,\frac{|Au_1+Bu_2+Cu_3|}{\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

sabiendo que $cos(90-\vartheta) = sen\,\vartheta$

Como caso particular, la recta r y el plano π son perpendiculares si $sen\,\vartheta = 0 \Rightarrow$

si $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son linealmente dependientes $\Rightarrow \dfrac{A}{u_1}=\dfrac{B}{u_2}=\dfrac{C}{u_3}$

► ***Ejemplo 39 (A)***

Hallar el ángulo que forman la recta $r:\begin{cases} 2x+5z=24 \\ y=z \end{cases}$ con el plano horizontal $(z=0)$ y el plano vertical $(y=0)$

Solución: A partir de dos puntos cualesquiera $A = (12,0,0)$ y $B = (2,4,4)$ de la recta r, se forma su vector director $\vec{u} = (5,-2,-2)$. Se sabe que el vector normal al plano $z = 0$ es $\vec{a} = (0,0,1)$ y el vector normal al plano $y = 0$ es $\vec{b} = (0,1,0)$, con lo que aplicando las fórmulas correspondientes:

- Angulo con el plano horizontal

$$\vartheta = arcsen\ \frac{|\vec{u}.\vec{a}|}{|\vec{u}|.|\vec{a}|} = arcsen\frac{|(5,-2,-2).(0,0,1)|}{\sqrt{25+4+4}\,.\sqrt{1}} = arcsen\ 0{,}3481 \Rightarrow \boxed{\vartheta = 20{,}37°}$$

- Angulo con el plano vertical

$$\vartheta = arcsen\ \frac{|\vec{u}.\vec{a}|}{|\vec{u}|.|\vec{a}|} = arcsen\frac{|(5,-2,-2).(0,1,0)|}{\sqrt{25+4+4}\,.\sqrt{1}} = arcsen\ 0{,}3481 \Rightarrow \boxed{\vartheta = 20{,}37°}$$

6.2. Ejemplos comunes a ambas materias

► ***Ejemplo 40 (A)***

Hallar el ángulo que forman la recta definida por los puntos $(7,2,2)$ y $(2,4,4)$ y el plano definido por los puntos $(5,1,4), (1,3,2)$ y $(7,4,1)$.

Solución: El vector director de la recta que pasa por los puntos $(7,2,2)$ y $(2,4,4)$ es $\vec{u} = (5,-2,-2)$. Como el plano definido por los puntos $(5,1,4), (1,3,2)$ y $(7,4,1)$ es $y + z = 5$, su vector normal es $\vec{n} = (0,1,1)$. Aplicando la fórmula correspondiente:

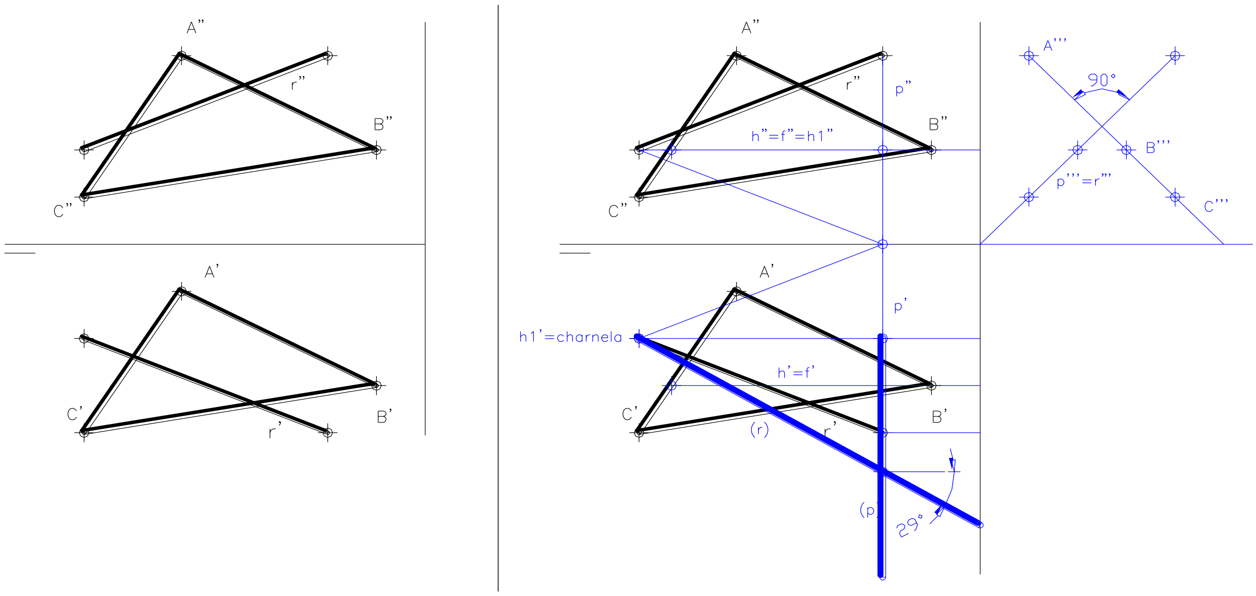
$$\vartheta = arcsen\ \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = arcsen\frac{|(5,-2,-2).(0,1,1)|}{\sqrt{25+4+4}\,.\sqrt{1+1}} = arcsen\frac{|-2-2|}{\sqrt{33}\,.\sqrt{2}} = arcsen\frac{|-4|}{\sqrt{66}}$$

$$= arscen\ 0{,}4924 \rightarrow \boxed{\vartheta = 29{,}49°}$$

►***Ejemplo 40 (D)***

Hallar el ángulo que forman las rectas r y el plano definido por los puntos ABC

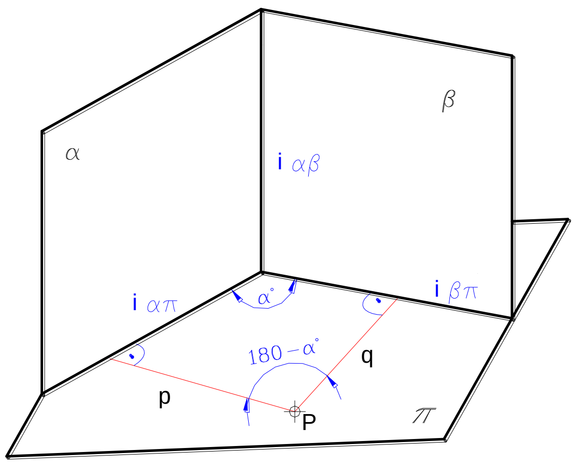
Solución: Para hallar la solución se traza por un punto cualquiera de la recta r una recta perpendicular al plano (p). Ambas rectas definen un plano y como en el ejercicio anterior se abate y se mide el ángulo que forman las rectas abatidas.



6.3.D – Ángulo entre dos planos

Por definición, el ángulo entre dos planos es el formado por las rectas intersección de esos planos con un plano perpendicular a ambos. Este plano quedaría definido trazando por un punto dos rectas perpendiculares a cada uno de ellos.

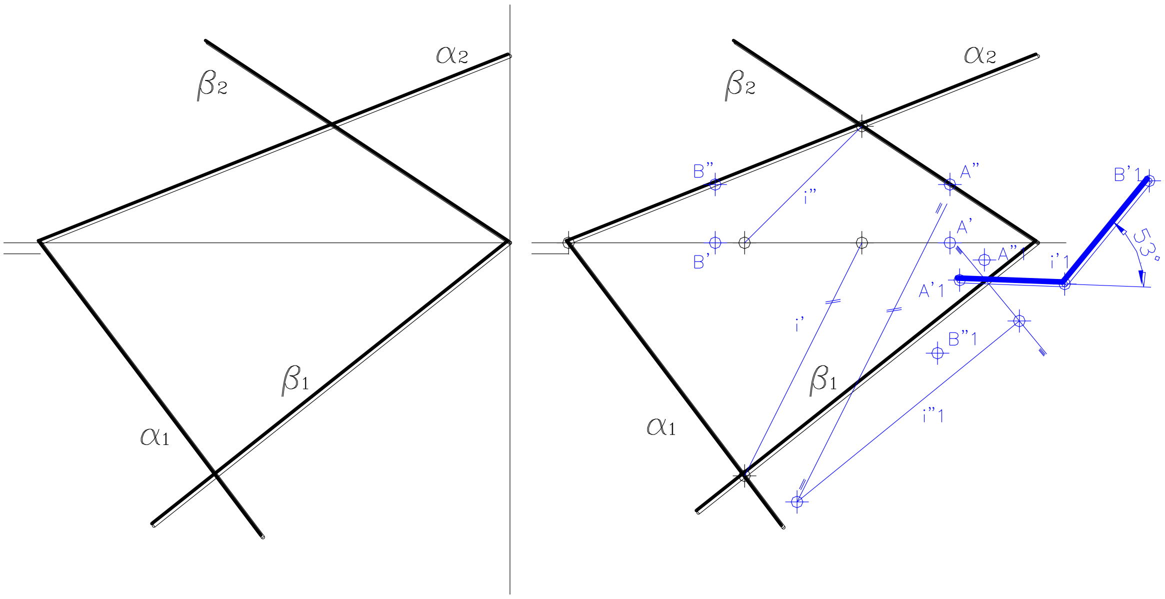
Según se observa en la figura, el ángulo de estas rectas es suplementario de las rectas intersección. Con estas consideraciones el ángulo entre los dos planos se reduce al cálculo del ángulo entre dos rectas (6.1.D)



►***Ejemplo 41 (D)***

Hallar el ángulo que forman los planos α y β

Solución: en este caso, el problema se ha resuelto, poniendo el plano definido por p y q paralelo a un plano de proyección. Esto es lo mismo que hallar la recta intersección de ambos planos (i) y mediante cambios de plano hacer que sea perpendicular a un plano de proyección (PH1). En esa proyección el ángulo entre ambos planos se puede medir directamente.



6.3.A – Ángulo entre dos planos

Las posiciones que pueden adoptar dos planos en el espacio son: coincidentes, paralelos o secantes. Según esas posiciones se tiene:

- Planos secantes: si dos planos se cortan, determinan cuatro ángulos iguales dos a dos. El menor de estos ángulos se denomina ángulo entre los dos planos.
- Planos coincidentes o paralelos: forman un ángulo de 0°.

El ángulo que forman dos planos coincide con el ángulo que forman sus vectores normales si el ángulo es agudo o con su suplementario si es obtuso.

Por tanto, dado el plano $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ cuyo vector normal es $\vec{n}_1$ y el plano $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ de vector normal $\vec{n}_2$, el ángulo que forman ambos planos se calcula utilizando a la fórmula

$$\vartheta = ang(\pi_1, \pi_2) = arccos\,\frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|} = arccos\,\frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2} + \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}$$

sabiendo que si éste es obtuso, utilizaremos el ángulo suplementario donde

$$cos(180 - \vartheta) = -\cos\,\vartheta$$

Como caso particular, los planos π_1 y π_2 son perpendiculares si $\cos\vartheta = 0 \Rightarrow$

si $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Dados los planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, el conjunto de puntos que equidistan de π_1 y de π_2, $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, está dado por

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z}{\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2z}{\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}$$

Estos planos se llaman planos bisectores de π_1 y π_2.

► ***Ejemplo 42 (A)***

Hallar el ángulo que forman el plano $\pi: 4x-5y-6z=0$ y el plano vertical $y=0$

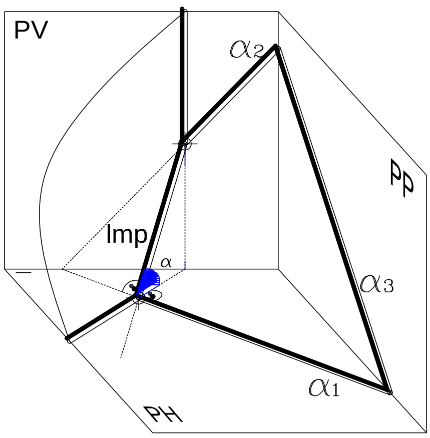
Solución: Se toma el vector $\vec{a}=(4,-5,-6)$ normal al plano π y el vector $\vec{b}=(0,1,0)$ normal al plano vertical. Aplicando la fórmula correspondiente:

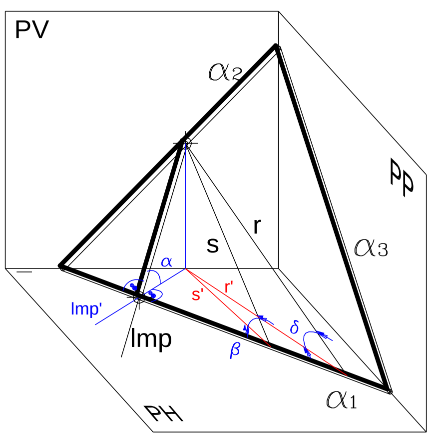
$$\vartheta = arcos\,\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|b|} = arcos\frac{|(4,-5,-6).(0,1,0)|}{\sqrt{16+25+36}\,.\sqrt{1}} = arcos\frac{|-5|}{\sqrt{77}} = arcos\,0{,}5698 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vartheta = 55{,}26°}$$

<u>6.4.D – Ángulos con los planos de proyección</u>

El ángulo de un plano con el PH se calcula trazando un plano perpendicular a la intersección de ambos (α_1). El plano auxiliar corta al plano α en una recta que se denomina **lmp** (línea de máxima pendiente). Esta es la recta del plano que mayor ángulo forma con el PH y a la vez es una línea que define por sí sola al plano. Es perpendicular a la α_1. Ver figuras.

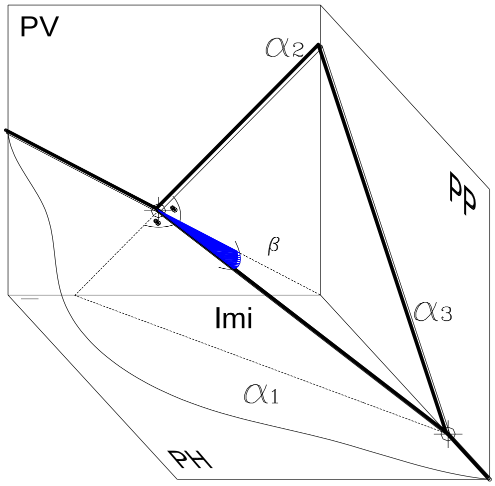


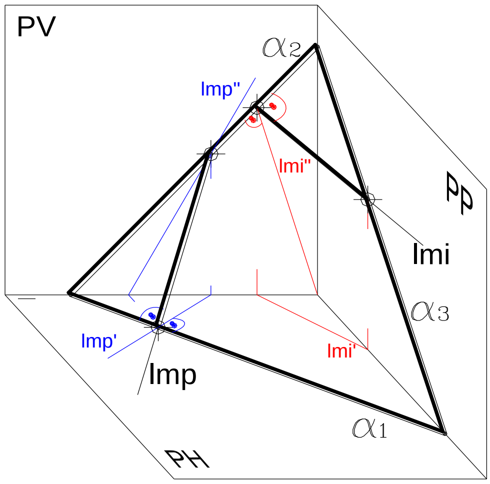


Para trazar por un punto del plano una línea de máxima pendiente hay que tener en cuenta que su proyección sobre el PH es perpendicular a α_1

Con las mismas consideraciones se define el ángulo del plano con el PV y la **lmi** (línea de máxima inclinación). Ver figuras. En este caso la proyección de esta línea sobre el PV es perpendicular a α_2

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

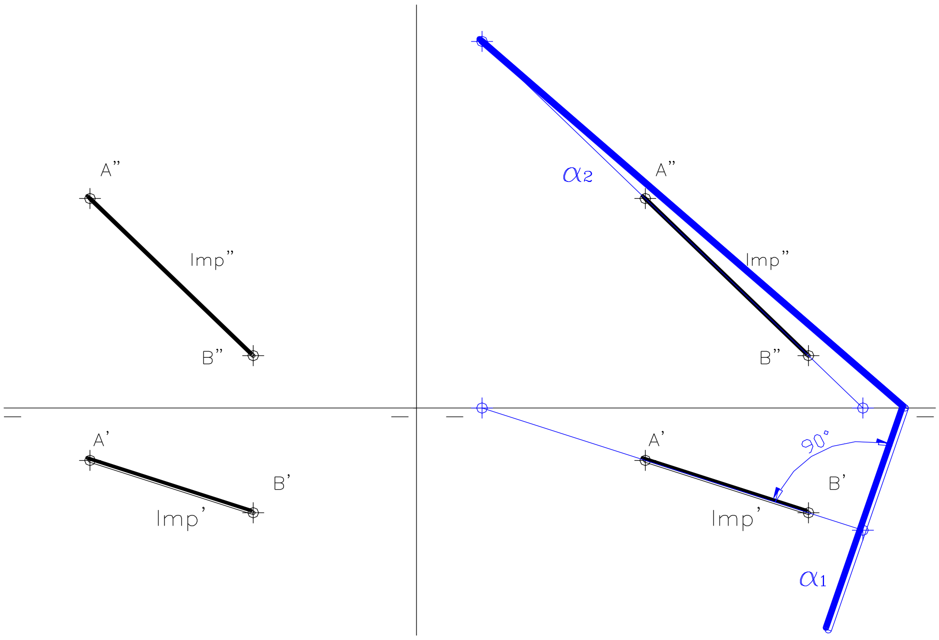




► ***Ejemplo 43 (D)***

Definir el plano α conocida su Imp

Solución: Si la recta Imp es la línea de máxima pendiente la traza horizontal del plano es perpendicular a ella. En el ejemplo se han hallado las dos trazas de la recta y por la traza horizontal se ha trazado α_1.



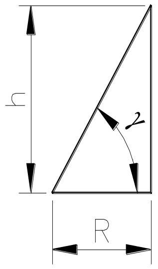
6.5.D – Problemas inversos

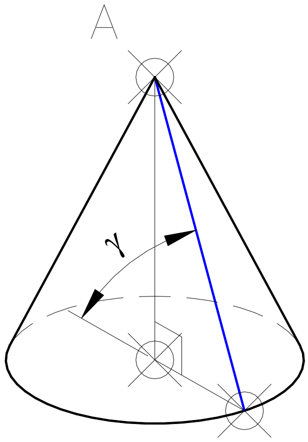
En ocasiones se conocerá el ángulo que ciertos elementos deben formar con otros. El problema consistente en determinar dichos elementos a partir de dicho ángulo y otras condiciones suele denominarse “problema inverso”.

Conceptos fundamentales

1) El lugar geométrico de las rectas que contienen a un punto y forman un ángulo determinado con otro plano es un cono que tiene las siguientes características:

- El vértice del cono es el punto conocido (el punto A, en la figura).
- El cono es recto, y su eje es perpendicular al plano en cuestión.
- La base del cono es circular, y su radio (R) debe ser conforme a la altura del cono (h) y al ángulo en cuestión (γ).

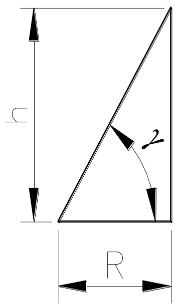


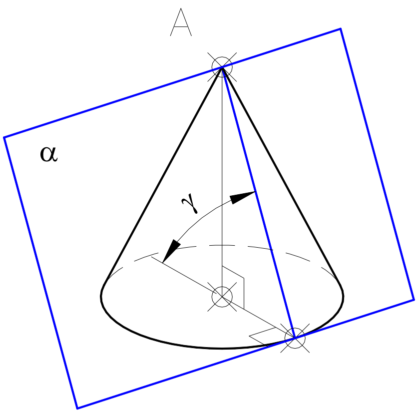


Todas las generatrices de dicho cono serán solución del problema planteado.

2) Los planos que contienen a un punto y forman un ángulo determinado con otro plano son tangentes a un cono que tiene las siguientes características:

- El vértice del cono es el punto conocido (el punto A, en la figura).
- El cono es recto, y su eje es perpendicular al plano en cuestión.
- La base del cono es circular, y su radio (R) debe ser conforme a la altura del cono (h) y el ángulo (γ).



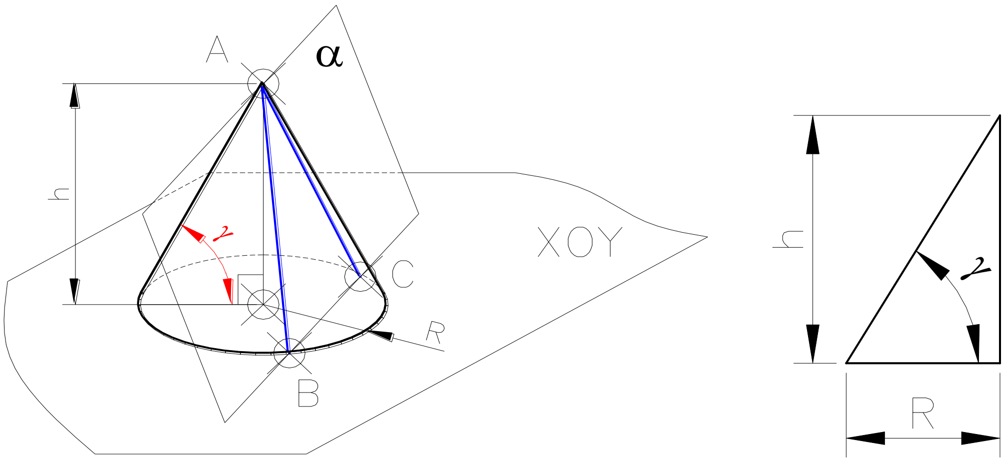


Problema tipo 1: determinar todas las rectas que pasan por el punto A, están contenidas en el plano α y forman un ángulo γ con el plano XOY.

Procedimiento de resolución:

1. Calcular las dimensiones (el radio R de la base) del cono: su vértice será el punto A, la altura del cono (h) será la coordenada Z.
2. Dibujar la base del cono: circunferencia de radio R y centro A'.
3. Determinar la intersección del plano α y la base del cono: puntos B y C.
4. Las dos soluciones (en el caso general) son las rectas AB y AC.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

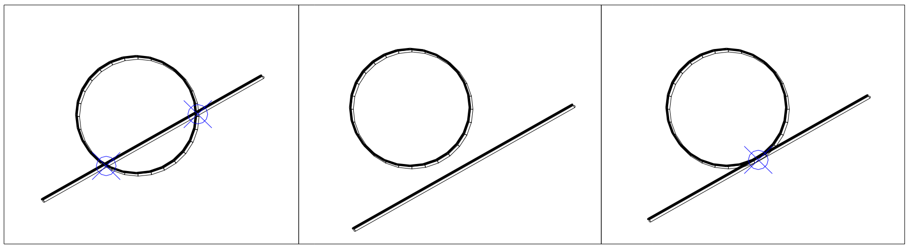


Casos posibles:

a) Si la pendiente de las rectas pedidas es menor que la pendiente del plano, habrá dos rectas solución (el plano cortará al cono según dos generatrices).

b) Si la pendiente de las rectas pedidas es mayor que la pendiente del plano, no habrá solución (el plano no cortará al cono)

c) Si la pendiente de las rectas pedidas es igual a la del plano, habrá una recta solución (el plano será tangente al cono).

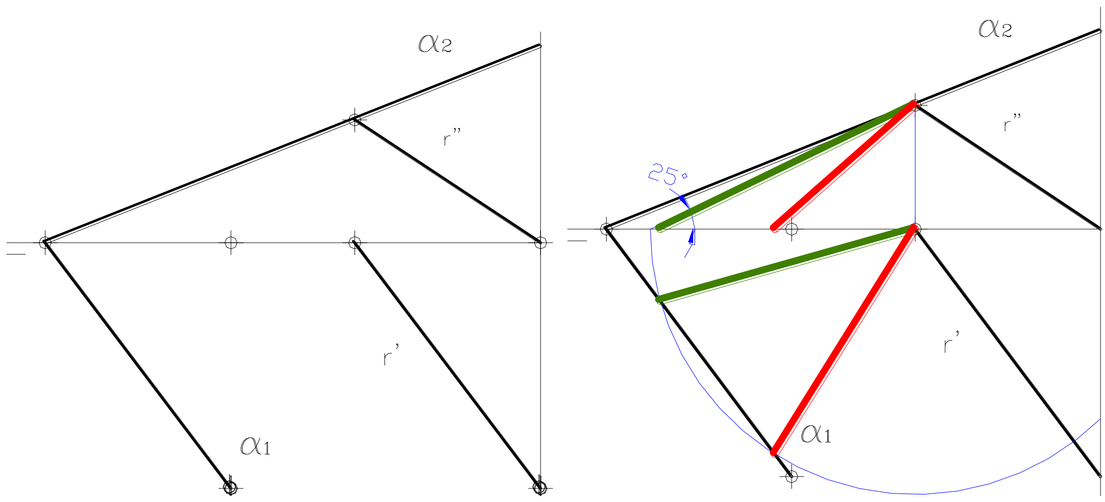


► ***Ejemplo 44 (D)***

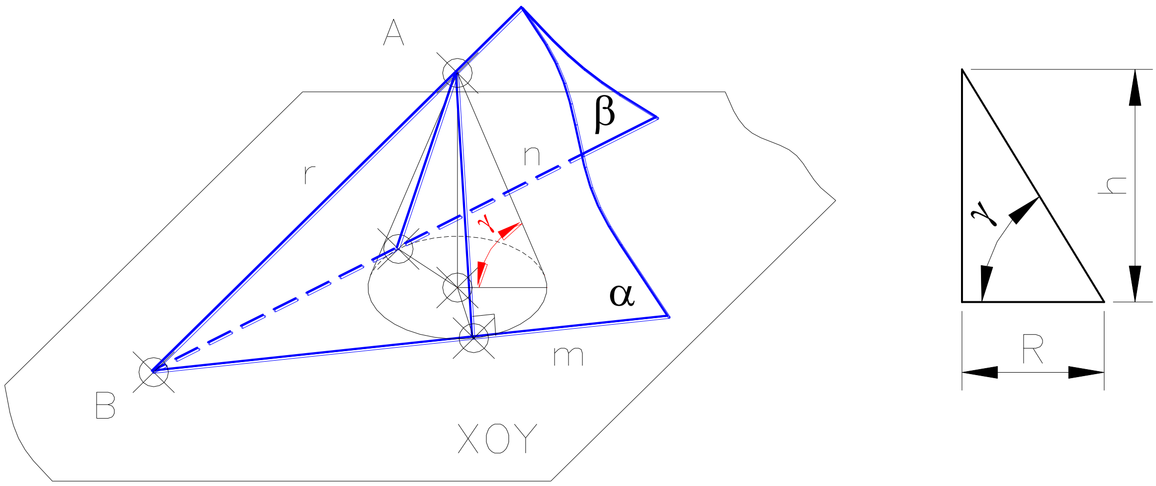
Definir y dibujar las rectas las rectas que corten a la recta r, estén contenidas en el plano α y formen 25º con PH (XOY).

Solución: son dos rectas.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe



Problema tipo 2: determinar todos los planos que contienen a la recta r y forman un ángulo γ con el plano XOY.



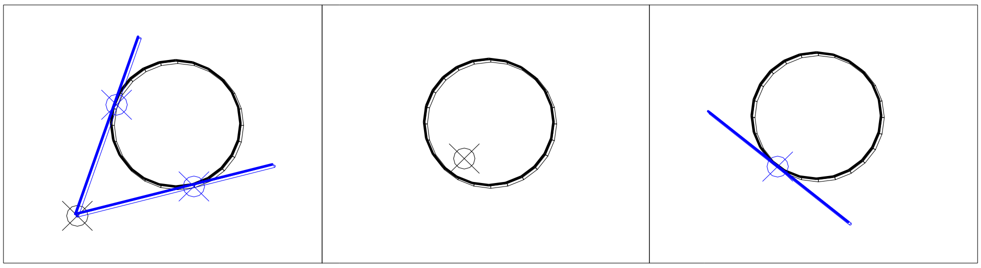
Procedimiento de resolución:

1. Calcular las dimensiones (el radio R de la base) del cono: su vértice será cualquier punto de r (el punto A, en la figura), la altura del cono (h) será la coordenada Z de dicho punto.
2. Dibujar la base del cono: circunferencia de radio R y centro A'.
3. Determinar la traza horizontal de la recta r: punto B.
4. Trazar por B las rectas tangentes a la base del cono: rectas horizontales m y n.
5. Las dos soluciones (en el caso general) son los planos: α = r+m, y β = r+n.

Casos posibles:

a) Si la pendiente de los planos pedidos es mayor que la pendiente de la recta, habrá dos planos solución (dos planos serán tangentes al cono).
b) Si la pendiente de los planos pedidos es menor que la pendiente de la recta, no habrá ninguna solución (no habrá ningún plano tangente al cono).

c) Si la pendiente de los planos pedidos es igual a la de la recta, habrá una solución (habrá un plano tangente al cono).



a) b) c)

6.3. Ejemplos comunes a ambas materias

► *Ejemplo 45 (A)*

Hallar el plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} x - z = 3 \\ 3y + z = 9 \end{cases}$ y forma $45°$ con el plano XOY

Solución:

Utilizando el concepto de haz de planos, se sabe que el plano que contiene a la recta r es

$\pi_1: x - z - 3 + \alpha\,(3y + z - 9) = 0$ cuyo vector normal es $\vec{n}_{\pi_1} = (1{,}3\alpha, \alpha - 1)$

El plano $\pi_2: z = 0$ tiene como vector normal al vector $\vec{n}_{\pi_2} = (0{,}0{,}1)$

El ángulo que forman los dos planos es el que forman sus vectores asociados $\Rightarrow$

$$\cos 45° = \frac{|(1{,}3\alpha, \alpha - 1)(0{,}0{,}1)|}{\sqrt{1^2 + (3\alpha)^2 + (\alpha - 1)^2}\ \sqrt{1}} = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{10\alpha^2 - 2\alpha + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$

$$2(\alpha - 1)^2 = 10\alpha^2 - 2\alpha + 2 \rightarrow \ 4\alpha^2 + \alpha = 0 \ \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

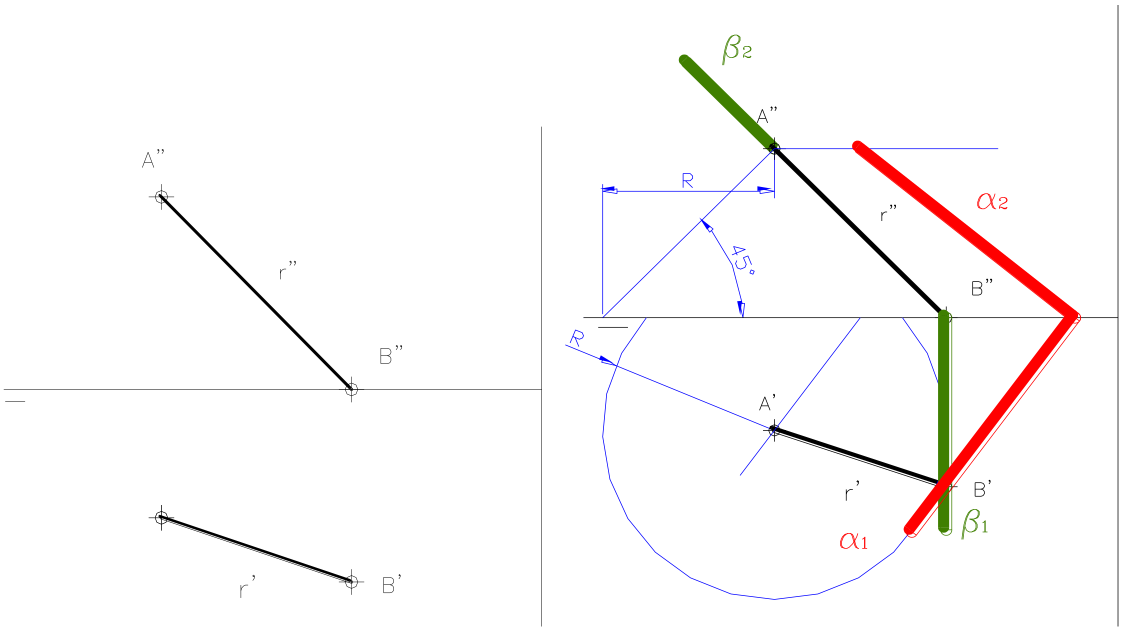
Sustituyendo esos valores en el plano π_1 tenemos los siguientes planos:

$\pi_{1a}: x - z - 3$ y $\pi_{1b}: 4x - 3y - 5z - 3 = 0$

► *Ejemplo 45 (D)*

Definir y dibujar los planos que contienen a la recta r y forman 45º con el PH

Solución: son dos planos α y β.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe