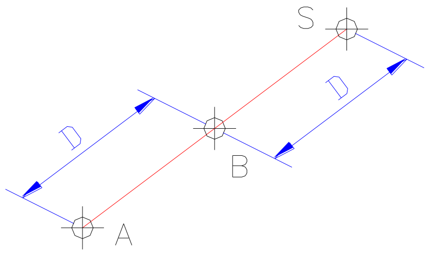
TEMA V: SIMETRÍAS

Se consideran tres simetrías del punto:

1. Punto simétrico respecto de un punto
2. Punto simétrico respecto de una recta
3. Punto simétrico respecto de un plano

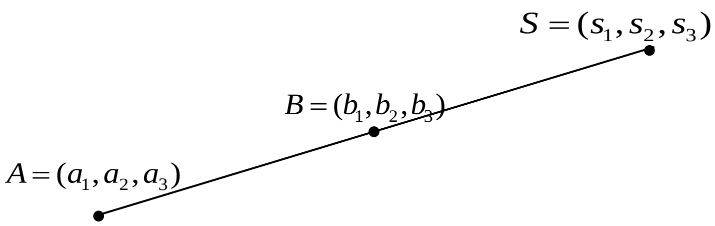
5.1.D – Punto simétrico respecto a otro

El simétrico (S) de un punto (A) respecto a otro (B) se encuentra en la prolongación de la recta que une a los puntos A y B, y a una distancia igual a AB.



5.1.A – Punto simétrico respecto a otro. Punto medio de un segmento

Dos puntos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $S=(s_1,s_2,s_3)$ son simétricos respecto de un punto B si son los extremos del segmento $\overline{AS}$ cuyo punto medio es B.



Las coordenadas del punto B son $\left(\dfrac{a_1+s_1}{2},\dfrac{a_2+s_2}{2},\dfrac{a_3+s_3}{2}\right)$

5.1. Ejemplos comunes a ambas materias

► ***Ejemplo 36 (A)***

Determinar el punto simétrico al punto $A=(4,3,3)$ respecto del punto $B=(0,1,6)$

Solución: El punto simétrico $S=(x,y,z)$ a calcular cumple que

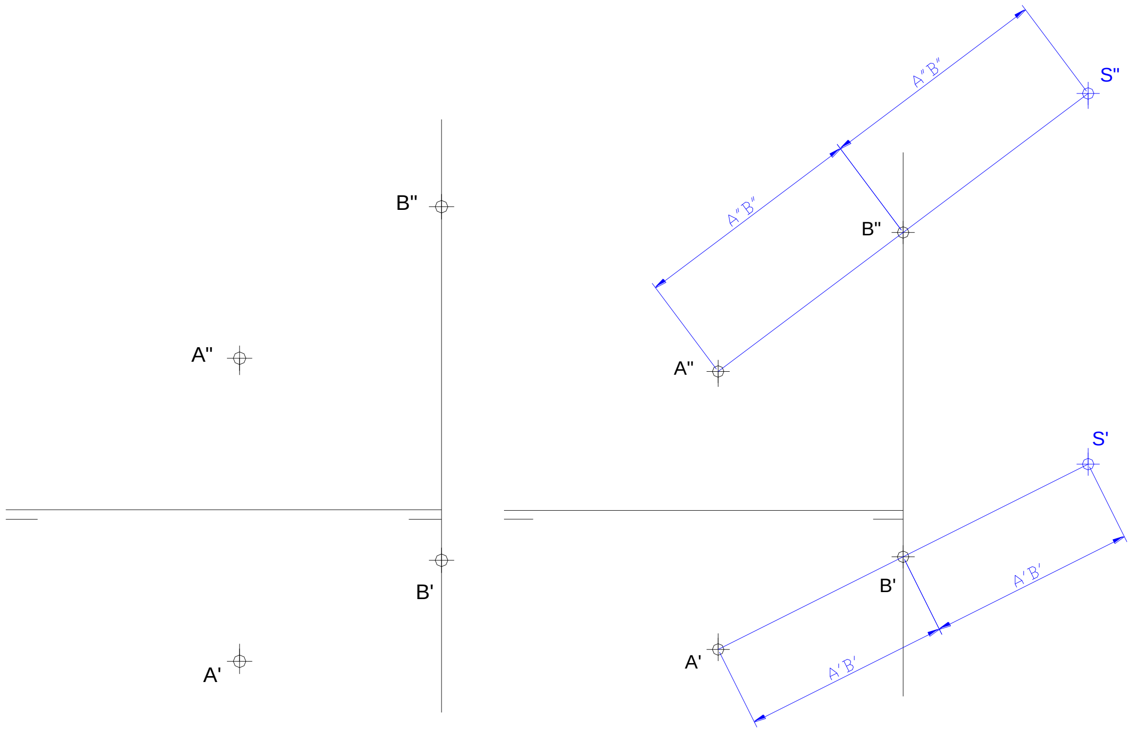
$$(0,1,6)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{3+z}{2}\right)\ \Rightarrow\ S=(-4,-1,9)$$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

► ***Ejemplo 36 (D)***

Determinar el punto simétrico al punto A respecto del punto B.

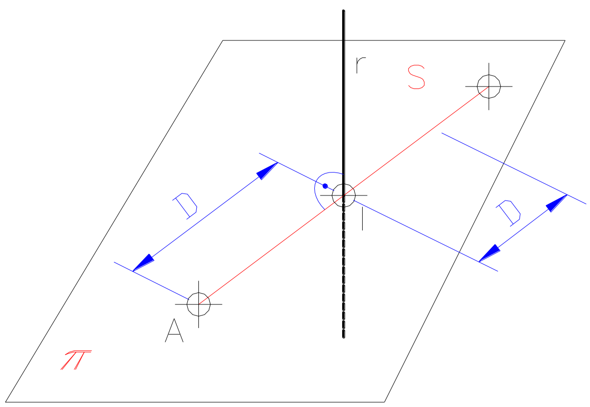
Solución: se unen los puntos A y B, y a la prolongación de esa recta (a partir de B) se lleva la distancia AB, obteniéndose el simétrico de A: el punto S.



5.2.D – Punto simétrico respecto a una recta

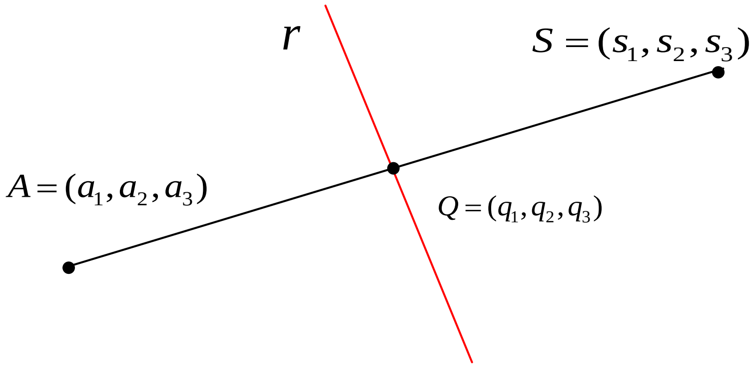
El simétrico (S) de un punto (A) respecto a una recta (r) está en la recta perpendicular y secante a la primera y a la misma distancia que tienen ambos (AI). Eso supone que la solución se encuentre en el plano perpendicular por el punto (A) a la recta (r). Los pasos a son:

1. Calcular el plano π que es perpendicular a (r) y que pasa por (A)
2. Hallar el punto (I) que es la intersección de (r) y π
3. Determinar el punto (S) simétrico del punto (A) respecto de (I)



5.2.A – Punto simétrico respecto a una recta

Dos puntos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $S=(s_1,s_2,s_3)$ son simétricos respecto de una recta r si son los extremos del segmento $\overline{AS}$ del cual r es mediatriz.



El punto Q, intersección del segmento AS y la recta r, es la proyección del punto A sobre la recta r y A y S son simétricos respecto de Q. Los pasos a seguir para hallar el punto simétrico a A respecto de la recta r son:

1. Calcular el plano π que es perpendicular a r y que pasa por el punto A
2. Hallar el punto Q que es la intersección de r y π
3. Determinar el punto S simétrico del punto A respecto de Q

► ***Ejemplo 37 (A)***

Dado el punto $A=(4,2,2)$, determinar su simétrico respecto de la recta $r:\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-5}{-3}$

Solución: Se calcula el plano que contiene a A y es perpendicular a r, tomando como vector normal del plano el vector director de la recta $\pi: 4x+2y-3z+D=0$

y se le hace pasar por el punto A: $4.4+2.2-3.2+D=0 \Rightarrow D=-14$

Entonces, $\pi: 4x+2y-3z-14=0$.

Se hallan las ecuaciones implícitas de la recta r: $r:\begin{cases} x-2y=4 \\ 3y+2z=13 \end{cases}$

y se determina el punto intersección de r y π: $Q=\begin{cases} x-2y=4 \\ 3y+2z=13 \\ 4x+2y-3z=14 \end{cases} \Rightarrow$

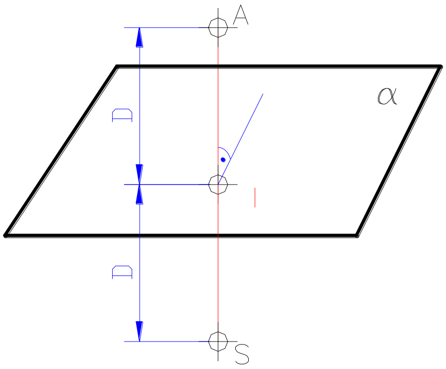
$Q=\left(\dfrac{186}{29},\dfrac{25}{29},\dfrac{136}{29}\right)$. Ahora se calcula el simétrico del punto A respecto de Q,

$$\left(\frac{186}{29},\frac{25}{29},\frac{136}{29}\right)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{2+y}{2},\frac{2+z}{2}\right) \Rightarrow S=\left(\frac{256}{29},-\frac{8}{29},\frac{214}{29}\right)$$

5.3.D – Punto simétrico respecto a un plano

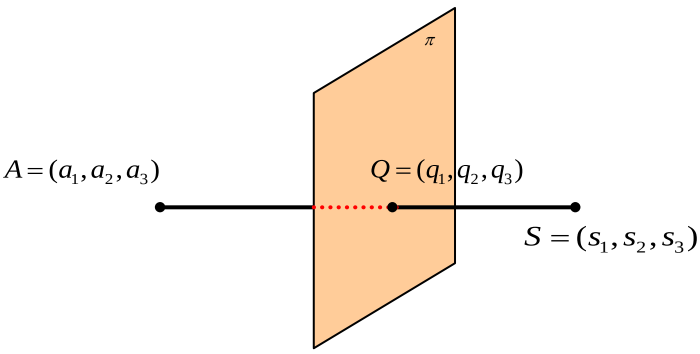
El simétrico (S) de un punto (A) respecto a un plano (α) se encuentra en la recta perpendicular por el punto al plano y a la misma distancia que existe entre ambos (AI). Los pasos a seguir para hallar el simétrico son:

1. Calcular la recta p que es perpendicular a (α) y que pasa por (A)
2. Hallar el punto (I) que es la intersección de (α) y p
3. Determinar el punto (S) simétrico del punto simétrico de (A) respecto de (I)



5.3.A – Punto simétrico respecto a un plano

Dos puntos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $S=(s_1,s_2,s_3)$ son simétricos respecto de un plano π si son los extremos del segmento AS cuyo plano mediador es π.



El punto Q, intersección del segmento $\overline{AS}$ y el plano π, es la proyección del punto A sobre π y A y S son simétricos respecto de Q.

Los pasos a seguir para hallar el punto simétrico a A respecto del plano π son:

1. Calcular la recta r que es perpendicular a π y que pasa por A
2. Hallar el punto Q que es la intersección de r y π
3. Determinar el punto S simétrico del punto A respecto de Q

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

5.3. Ejemplos comunes a ambas materias

► ***Ejemplo 38 (A)***

Dado el punto $A=(5,0,0)$, determinar su simétrico respecto del plano $\alpha: 4x-y-4z=8$

Solución: Se calcula la recta que pasa por A y es perpendicular a α, tomando como vector director de la recta el vector normal al plano $\vec{n}=(4,-1,-4)$

$$r: \frac{x-5}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-4} \Rightarrow \begin{cases} 5-x=4y \\ 4y=z \end{cases}$$

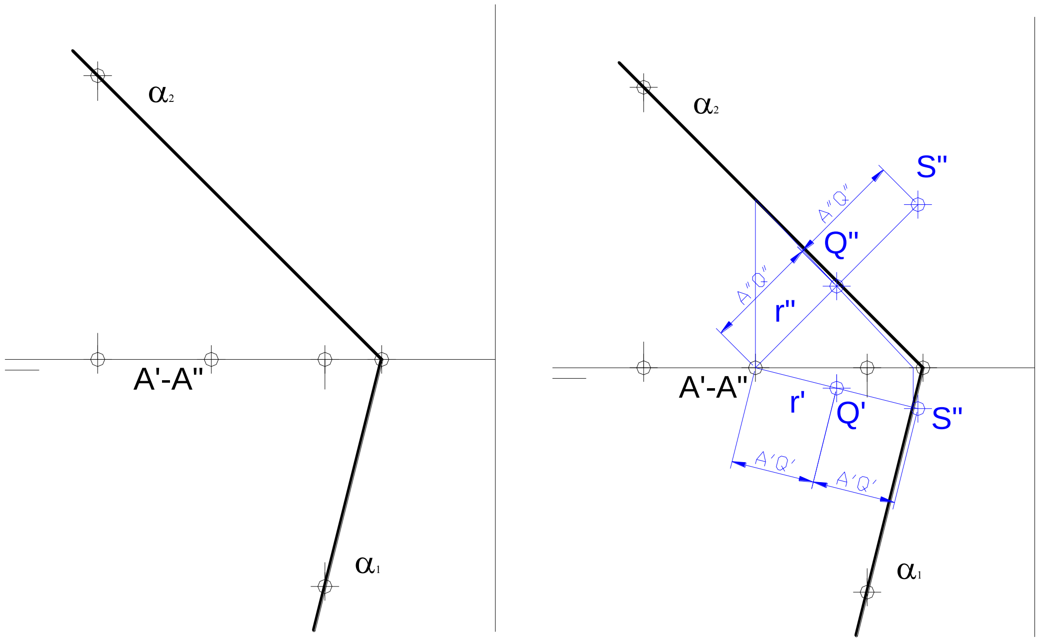
Se determina el punto intersección de r y α: $Q=\begin{cases} 5-x=4y \\ 4y=z \\ 4x-y-4z=8 \end{cases} \Rightarrow$

$Q=\left(\frac{39}{11},\frac{4}{11},\frac{16}{11}\right)$ y se calcula el simétrico del punto A respecto de Q:

$$\left(\frac{39}{11},\frac{4}{11},\frac{16}{11}\right)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{0+z}{2}\right) \Rightarrow S=\left(\frac{23}{11},\frac{8}{11},\frac{32}{11}\right)$$

► ***Ejemplo 38 (D)***

Dado el punto A determinar su simétrico respecto del plano α.



Solución: por A se traza la recta r perpendicular al plano α; se determina (mediante un plano auxiliar) la intersección de r y α: el punto Q; se lleva a la recta r (a partir del punto Q) la distancia AQ, y se obtiene el simétrico de A: el punto S.