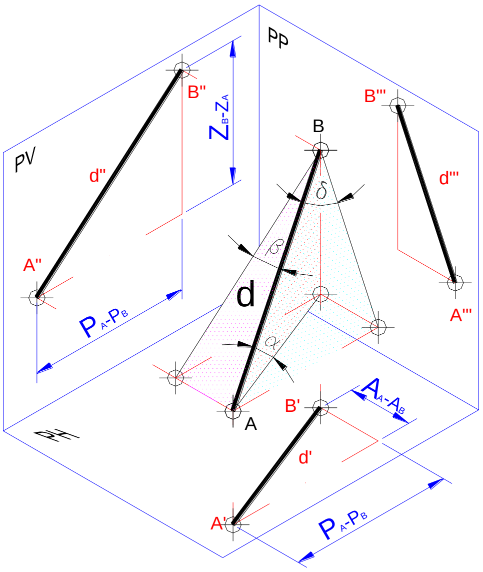
TEMA IV: DISTANCIA ENTRE ELEMENTOS

4.1.D – Distancia entre dos puntos

Teniendo en cuenta las relaciones métricas que se establecen entre las proyecciones ortogonales sobre un plano de un segmento AB se puede obtener la distancia real del mismo conocidas sus proyecciones. Para ello se construyen alguno de los triángulos rectángulos que se forman: con la proyección sobre el PH, el PV o el PP.

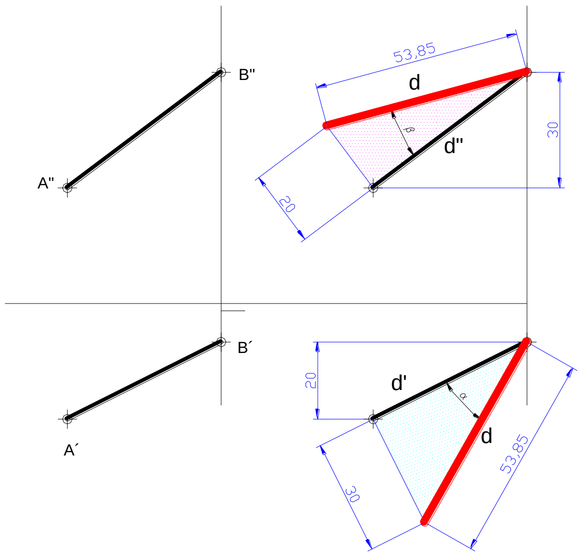


Otro de los resultados que se obtiene con la construcción de estos triángulos es el ángulo que forma el segmento con los planos de proyección PH, PV y PP en cada caso. Con d´ el ángulo que forman con PH. Con d” el ángulo con PV y con d´´´ el ángulo con PP.

► ***Ejemplo 26 (D)***

Calcular la distacia entre los puntos A(4,3,3) y B(0,1,6)

Solución: se construyen los triángulos auxiliares con las poyecciones de las rectas. Bastaría con la construcción de uno solo de los triángulos. En el ejmplo se han construido los dos y se comprueba que el resultado es el mismo en ambos casos



BY NC SA

4.1.A – Distancia entre dos puntos

Si A y B son dos puntos del espacio, la distancia entre ambos puntos coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, que es la longitud del segmento $\overline{AB}$.
La distancia se designa por $d(A,B)$ o bien $|\overrightarrow{AB}|$.
Si $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$ son las coordenadas de los puntos A y B, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

de donde la expresión analítica de las distancia queda como:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

La distancia entre dos puntos tiene las siguientes propiedades:

$d(A,B) = 0 \longleftrightarrow A = B$

$d(A,B) = D(B,A)$ (Propiedad de simetría).

$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (Desigualdad triangular)

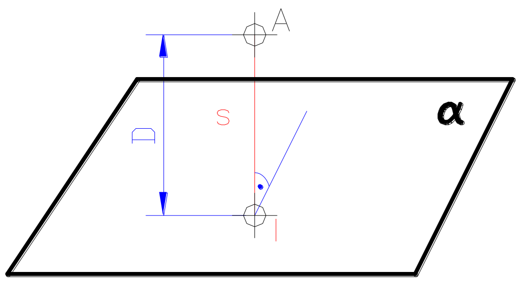
► ***Ejemplo 27 (A)***

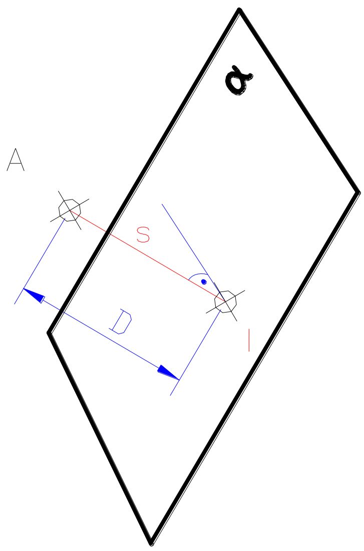
Hallar la distancia entre los puntos $A(4,3,3)$ y $B(4,3,6)$

Solución: La distancia es: $d(A,B) = \sqrt{(4-4)^2 + (3-3)^2 + (3-6)^2} = 3$

4.2.D – Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto a un plano se mide sobre la recta perpendicular por el punto al plano. Los pasos a seguir son los siguientes:
1.- Trazar por el punto **A** una recta **s** que sea perpendicular al plano
2.- Hallar la intersección de **s** y el plano (punto **I**)
3.- La distancia real entre **AI** es la solución.





4.2.A – Distancia de un punto a un plano

Si un punto P pertenece a un plano α, es evidente que la distancia al mismo es nula. Por eso suponemos que el punto P es exterior al plano. En este caso, la distancia es la longitud del segmento $\overline{PQ}$, donde Q es la proyección ortogonal de P sobre el plano α.

Expresión vectorial

Consideremos un punto P y un plano α dado por la determinación $\alpha(A_\alpha, \vec{n}_\alpha)$, donde A_α es un punto cualquiera del plano α y $\vec{n}_\alpha$ es un vector director de dicho plano. Sea Q la proyección del punto P sobre el plano α.

La distancia del punto P al plano α es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$; es decir $d(P,\alpha) = |\overrightarrow{QP}|$

En el triángulo rectángulo $A_\alpha QP$ se tiene: $\overrightarrow{A_\alpha P} = \overrightarrow{A_\alpha Q} + \overrightarrow{QP}$

Multiplicando escalarmente los dos miembros de la igualdad anterior por el vector normal $\vec{n}_\alpha$, resulta: $\overrightarrow{A_\alpha P} \cdot \vec{n}_\alpha = \overrightarrow{A_\alpha Q} \cdot \vec{n}_\alpha + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_\alpha = \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_\alpha$

ya que $\overrightarrow{A_\alpha Q}$ y $\vec{n}_\alpha$ son ortogonales y por tanto su producto escalar es cero.

Si tomamos valor absoluto en la última expresión se obtiene: $|\overrightarrow{A_\alpha P} \cdot \vec{n}_\alpha| = |\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_\alpha| = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\vec{n}_\alpha|$

de donde $\boxed{d(P,\alpha) = |\overrightarrow{QP}| = \dfrac{|\overrightarrow{A_\alpha P} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|}}$ (1)

Expresión analítica

Sea la ecuación general del plano α: $Ax + By + Cz + D = 0$

Sea $A_\alpha(x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera perteneciente al plano α, $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ el vector normal director del plano y $P(x_1, y_1, z_1)$ el punto dado. Sustituyendo estos valores en (1) resulta:

$$d(P,\alpha) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (A, B, C)|}{|(A, B, C)|}$$
$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Puesto que $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, por ser $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano α, se tiene finalmente que $\boxed{d(P,\alpha) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$

Si la ecuación del plano está dada en otra forma, se pasa a la ecuación implícita y se aplica la expresión anterior.

Para hallar la distancia de un punto a un plano se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación general del plano y se divide por el módulo del vector normal del plano. Si éste resultado es negativo, se toma en valor absoluto.

► ***Ejemplo 28 (A)***

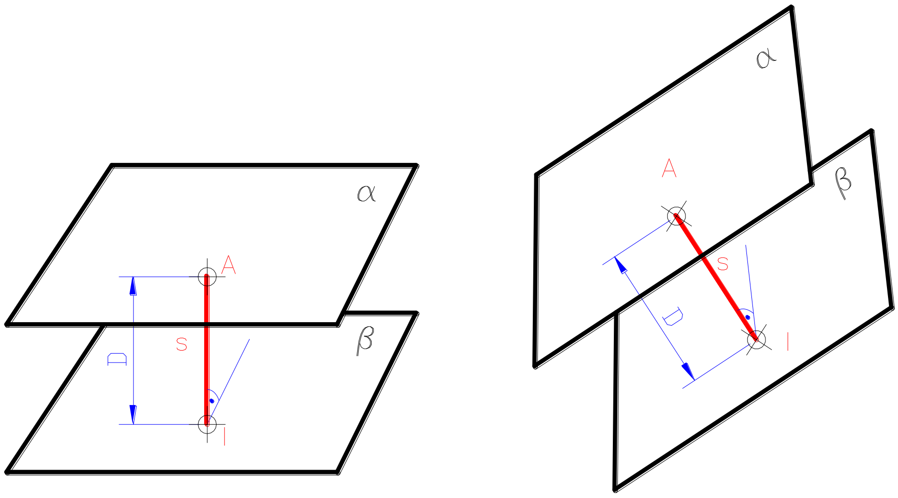
Hallar la distancia entre el punto $A(1,0,1)$ y el plano $\alpha: 4x + y + 4z = 36$

OpenCourseWare BY NC SA

Solución: $d(A,\alpha)=\dfrac{|4\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 1-36|}{\sqrt{4^2+1^2+4^2}}=\dfrac{28}{\sqrt{33}}$

4.3.D – Distancia entre dos planos paralelos

Eligiendo un punto cualquiera (A) de uno de los planos el problema se reduce al caso precedente.



4.3.A – Distancia entre dos planos paralelos

La distancia entre dos planos α y β paralelos es igual a la distancia de un punto cualquiera de un plano al otro plano:

$d(\alpha,\beta)=d(P_\alpha,\beta)=d(P_\beta,\alpha)$

Para facilitar los cálculos se puede elegir un punto de la forma $(0,0,z),(0,y,0),(x,0,0)$.
Sólo resta hallar en cada opción los valores de x, y o z.

► ***Ejemplo 29 (A)***

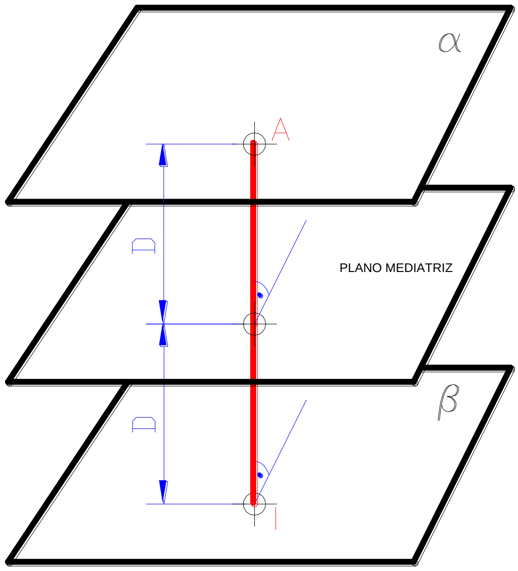
Hallar la distancia entre el plano $\alpha: 4x+y+4z=36$ y el plano β que pasa por los puntos (2,0,0), (1,0,1) y (1,4,0)

Solución: La ecuación implícita de β es $\beta: 4x+y+4z=8$. Por otra parte, es evidente que ambos planos son paralelos por tener los vectores directores proporcionales, en este caso iguales.
El ejercicio se completa tomando un punto cualquiera, $P(9,0,0)\in\alpha$ y calculando su distancia al plano β.

$d(P,\alpha)=\dfrac{|9\cdot 4+0\cdot 1+0\cdot 4-8|}{\sqrt{4^2+1^2+4^2}}=\dfrac{28}{\sqrt{33}}$

4.4.D – Plano mediatriz de dos planos

Es el plana paralelo a los dos que pasa por el punto medio de la distancia.



4.4.A – Plano mediatriz de dos planos

Si α y β son dos planos paralelos, el plano mediador de ambos planos es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de α y de β.
Dados los dos planos de ecuaciones

$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

la condición de paralelismo hace que los vectores normales de los planos sean proporcionales

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \delta \in R$ es decir $rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$

El cálculo analítico del plano mediador de dos planos se limita a obtener la ecuación de un plano paralelo a los dos anteriormente definidos y que equidiste de ambos. Por ello su ecuación general será de la forma $\gamma : A_1x + B_1y + C_1z + M_1 = 0$

► ***Ejemplo 30 (A)***

Calcular el plano mediador de los planos paralelos $\begin{cases} \alpha : x - 2y + 3z - 14 = 0 \\ \beta : -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

a) Tomar un punto cualquiera de uno de los planos y calcular la recta perpendicular *r* a los dos planos paralelos que pasa por dicho punto:
$P_\beta = (0,0,0) \in \beta$, y la recta *r* en forma paramétrica queda determinada por el punto y el vector normal $\vec{n}_\alpha$ o bien $\vec{n}_\beta$. $r : \begin{cases} x & = 0 + t \\ y & = 0 - 2t \\ z & = 0 + 3t \end{cases}$

b) Punto de intersección P_α de la recta r y el plano α
En este caso la ecuación de la recta está en forma paramétrica y se sustituye $x = t,\ y = -2t,\ z = 3t$ en la ecuación del plano α:
$(0+t) - 2(0-2t) + 3(0+3t) - 14 = 0 \longleftrightarrow t = 1$

por lo que $P_\alpha = (1,-2,3) \in \alpha$

c) Punto medio P_γ del segmento $\overline{P_\alpha P_\beta}$.

$$P_\gamma = \frac{P_\alpha + P_\beta}{2} = \frac{(1,-2,3)+(0,0,0)}{2} = \left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$$

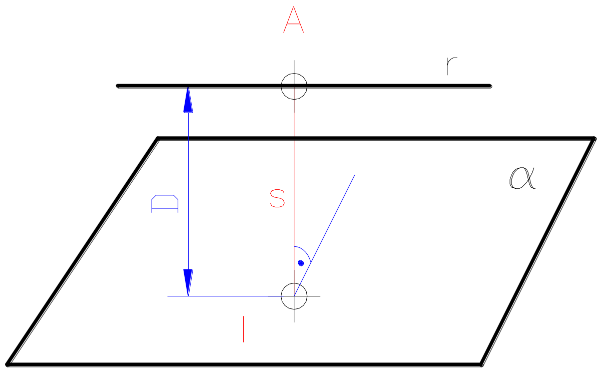
d) Se exige que el punto P_γ pertenezca al plano mediador γ

$P_\gamma \in \gamma : x-2y+3z+M_1=0 \rightarrow M_1=-7$

y se obtiene la ecuación general del plano mediador o mediatriz de los planos paralelos α y β: $\gamma : x-2y+3z-7=0$

4.5.D – Distancia entre una recta y un plano paralelos

Eligiendo un punto cualquiera (A) de la recta el ejercicio queda reducido al caso de distancia entre punto y plano.



4.5.A – Distancia entre una recta y un plano paralelos

Sean la recta r dada por la determinación $r(A_r,\vec{u}_r)$ y el plano α dado por la determinación $\alpha(A_\alpha,\vec{n}_\alpha)$.

Como r y α son paralelos el vector director de la recta r, $\vec{u}_r$, y el vector normal del plano α, $\vec{n}_\alpha$, son perpendiculares, por lo que su producto escalar es nulo $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\alpha = 0$

Geométricamente la distancia entre r y α no es más que seleccionar un punto arbitrario A_r de la recta r y calcular su distancia al plano $\alpha : d(r,\alpha) = d(A_r,\alpha)$

Nota: Si la distancia así obtenida es nula, se deduce que la recta r está contenida en el plano α.

► ***Ejemplo 31 (A)***

Hallar la distancia de la recta $r:\begin{cases} x=3-3t \\ y=6-t \\ z=6t \end{cases}$ al plano $\alpha : 6x+12y+5z-66=0$ paralelo

Solución: Primero comprobamos que efectivamente que la recta *r* y el plano α son paralelos, esto es:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\alpha = (-3,-1,6)\cdot(6,12,5) = 0\,.$$

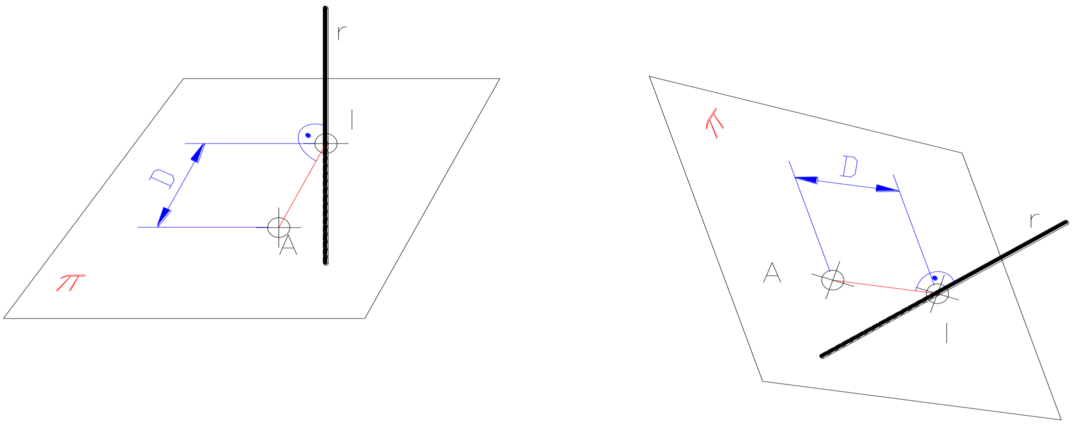
Este caso de paralelismo entre recta y plano se reduce al caso de distancia de un punto de la recta al plano:

$$d((3,6,6),\alpha) = \frac{|6\cdot 3 + 12\cdot 6 + 5\cdot 0 - 66|}{\sqrt{6^2+12^2+5^2}} = \frac{24}{\sqrt{205}}$$

4.6.D – Distancia entre un punto y una recta

La distancia entre un punto y una recta se mide en una recta perpendicular a ella y por lo tanto en un plano perpendicular a ella. El procedimiento es el siguiente:

1.- Trazar por el punto **A** un plano a perpendicular a **r**
2.- Hallar la intersección de **r** y el plano (punto **I**)
3.- La distancia real entre **AI** es la solución.



4.6.A – Distancia entre un punto y una recta

Si un punto *P* pertenece a una recta, es evidente que la distancia a la misma es nula. Por eso suponemos que el punto *P* es exterior a la recta. En este caso, la distancia del punto *P* a la recta es la longitud del segmento $\overline{PQ}$, donde Q es la proyección ortogonal de *P* sobre la recta.

Expresión vectorial

Consideremos una recta r dada por la determinación $r(A_r, \vec{u}_r)$, donde A_r es un punto cualquiera de la recta r y $\vec{u}_r$ es un vector director de dicha recta.

La distancia del punto P a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$; es decir, $d(P,r) = |\overrightarrow{QP}|$

En el triángulo rectángulo A_rQP se tiene: $\overrightarrow{A_rP} = \overrightarrow{A_rQ} + \overrightarrow{QP}$

Multiplicando vectorialmente los dos miembros de la igualdad anterior por el vector direccional $\vec{u}_r$, resulta: $\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r = \overrightarrow{A_rQ}\times\vec{u}_r + \overrightarrow{QP}\times\vec{u}_r = \overrightarrow{QP}\times\vec{u}_r$

ya que $\overrightarrow{A_rQ}$ y $\vec{u}_r$ son paralelos y por tanto su producto vectorial es cero.

Si tomamos módulos en la última expresión se obtiene: $|\overrightarrow{A_rP}\times\vec{u}_r| = |\overrightarrow{QP}\times\vec{u}_r| = |\overrightarrow{QP}|\cdot|\vec{u}_r|$

de donde $d(P,r) = |\overrightarrow{QP}| = \dfrac{|\overrightarrow{A_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$ (1)

La distancia del punto a la recta es igual al área del paralelogramo construido sobre $\vec{u}_r$ y $\overrightarrow{A_r P}$ dividido por la base (de módulo $|\vec{u}_r|$).

Expresión analítica

Si la ecuación continua de la recta r es $r: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

entonces $A_r(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de la misma y $\vec{u}_r = (a,b,c)$ el vector direccional. Sea $P(x_1, y_1, z_1)$ el punto exterior a la recta r. Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) resulta: $\boxed{d(P,r) = \dfrac{|(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0) \times (a,b,c)|}{|(a,b,c)|}}$

Si la recta viene dada de otra forma, se halla un punto de la misma y su vector direccional y se aplica la fórmula anterior.

► ***Ejemplo 32 (A)***

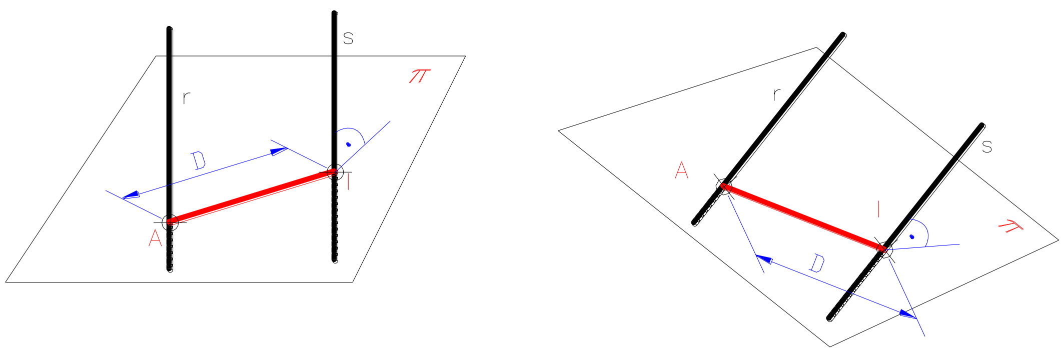
Hallar la distancia del punto $A(7,1,5)$ a la recta $r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-5}{-3}$.

Solución: Se define un punto cualquiera de la recta *r*, P(1,0,5), y se aplica la fórmula de la distancia de un punto a una recta, donde $\vec{u}_r = (4,2,-3)$, $\overrightarrow{AP} \times \vec{u}_r = (3,-18,-8)$ y $|\vec{u}_r| = \sqrt{29}$:

$$d(A,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{\sqrt{397}}{\sqrt{29}}$$

4.7.D –Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas queda reducida al caso anterior eligiendo un punto cualquiera de una de ellas.



4.7.A –Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas es igual a la distancia de un punto cualquiera de una a la otra recta: $d(r,s) = d(P_r, s) = d(P_s, r)$

Hallado el punto P_r o P_s, el problema se reduce al cálculo de la distancia de un punto a una recta.

► ***Ejemplo 33 (A)***

Hallar la distancia entre las rectas $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-3}$ y $s: \begin{cases} x = 7+4t \\ y = 1+2t \\ z = 5-3t \end{cases}$

Solución: Evidentemente ambas rectas son paralelas por tener sus vectores directores paralelos.
Si tomamos el punto $A(7,1,5) \in s$, observamos que estamos ante el ejercicio anterior resuelto de ejemplo para el caso de distancia de un punto a una recta, donde se obtuvo

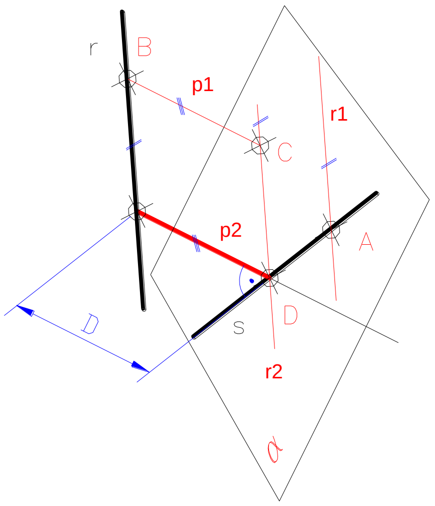
$$d(r,s) = d(r,A) = \sqrt{\frac{397}{29}}$$

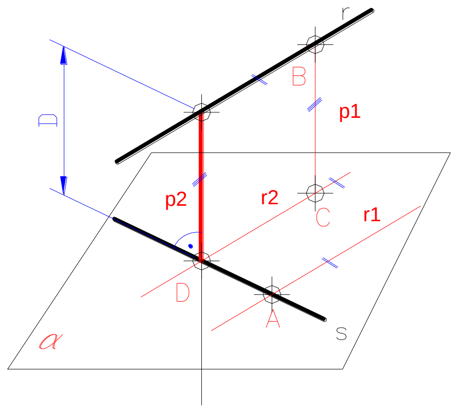
4.8.D – Distancia entre dos rectas que se cruzan

La distancia entre dos rectas que se cruzan se mide en una recta perependicular a ambas. El problema se simplifica si sólo se pretende conocer la distancia. Si la cuestión es que el segmento corte a las dos rectas se alarga la solución.
El procedimiento a seguir es el siguiente:
1.- Se elige un punto **A** de una de las rectas y por el se traza una recta paralela a la otra **r1**. Ambas rectas definen un plano α
2.- Se elige un punto cualquiera de la otra recta **B** y se traza una recta perpendicular por él al plano anterior **p1.**
3.- Se halla la intersección del plano y esta recta (punto **C**)
4.- La distancia real entre **BC** es la solución.
Si se quiere que ese segmento se apoye en las rectas se continua:
5.- Por **C** se traza una recta **r2** paralela a **r**

6.- Esta recta cortará a **s** en un punto **D** porque están en el mismo plano y no son paralelas.
7- Por **D** se traza una recta paralela a **p1** que cortará a **r** porque pertenecen al mismo plano (recta **p2)**
8.- Se halla la intersección de **p2** con el plano y se obtiene **I**
9.- **DI** es la solución

OpenCourseWare





4.8.A – Distancia entre dos rectas que se cruzan

La distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es la existente entre el plano paralelo a s que pasa por r y el plano paralelo a r que pasa por s.

Expresión vectorial

Si las rectas *r* y *s* tienen por determinaciones $r(A_r,\vec{u}_r)$ y $s(A_s,\vec{u}_s)$, respectivamente, entonces la distancia de la recta *r* a la recta *s* es igual a la distancia del punto A_s al plano $\alpha(A_r,\vec{u}_r,\vec{u}_s)$: $d(r,s)=d(A_s,\alpha)$

Puesto que la ecuación vectorial de la distancia de un punto *P* a un plano α es

$$d(P,\alpha)=\frac{|\overrightarrow{A_\alpha P}\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|}$$

Tomando para nuestro caso $A_\alpha=A_r$, $P=A_s$ y $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_r\times\overrightarrow{u_s}$ resulta

$$d(r,s)=d(A_s,\alpha)=)=\frac{|\overrightarrow{A_rA_s}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

y recordando la definición del producto mixto se obtiene finalmente

$$\boxed{d(r,s)=\frac{|det(\overrightarrow{A_rA_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}} \quad (1)$$

Expresión analítica

Si las rectas vienen dadas en forma continua por

$$r:\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \qquad s:\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

Entonces los vectores que hay que utilizar en la fórmula (1) son

$$\vec{u}_r=(a_1,b_1,c_1),\ \vec{u}_s=(a_2,b_2,c_2),\ \overrightarrow{A_rA_s}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

La fórmula literal que se obtiene con estos valores es muy compleja, y en la práctica se emplea directamente la fórmula (1) con los valores numéricos del problema.

Cuando las expresiones de las rectas son distintas de la forma continua, se halla un punto de cada recta, sus vectores direccionales respectivos y se utiliza la fórmula (1).

Nota: Algunas veces es más fácil seguir y desarrollar la definición de distancia entre dos rectas. Basta calcular el punto A_s y la ecuación del plano α que contiene a la recta *r*, pasa por $A_r(x_1,y_1,z_1)$ y es paralelo a *s*. Luego se aplica la fórmula de la distancia de un punto A_s a un plano α. La ecuación de dicho plano α se obtiene por un simple determinante: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$

► ***Ejemplo 34 (A)***

Hallar la distancia entre las rectas $r: \dfrac{x-13}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-5}{-3}$ y $s: \begin{cases} x=3+5t \\ y=2+t \\ z=4t \end{cases}$

Solución: A continuación aplicaremos directamente la expresión analítica de la distancia entre dos rectas que se cruzan.
La recta *r* se determina por el punto $B(13,0,5)$ y el vector $\vec{u}_r=(4,5,-3)$, la recta s por el punto $A(3,2,0)$ y el vector $\vec{u}_s=(5,1,4)$, por lo que la distancia entre las rectas será:

$d(r,s)=\dfrac{|\,det(\overrightarrow{AB},\vec{u}_r,\vec{u}_s)\,|}{|\,\vec{u}_r\times\vec{u}_s\,|}=\dfrac{187}{\sqrt{1931}}$ donde: $\overrightarrow{AB}=B-A=(10,-2,5)$,

$det(\overrightarrow{AB},\vec{u}_r,\vec{u}_s)=\begin{vmatrix} 10 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}=187$ y $|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|=|(23,-31,-21)|=\sqrt{1931}$

<u>Perpendicular común</u>

Se llama perpendicular común de dos rectas que se cruzan a la recta que corta ortogonalmente a cada una de ellas.
La perpendicular común p de dos rectas r y s que se cruzan queda determinada por la intersección de los planos $\alpha(A_r,\vec{u}_r,\vec{u}_r\times\vec{u}_s)$ y $\beta(A_s,\vec{u}_s,\vec{u}_r\times\vec{u}_s)$
Por lo tanto, la expresión analítica de la recta perpendicular común es $p:\begin{cases} det(\overrightarrow{A_rX},\vec{u}_r,\vec{u}_r\times\vec{u}_s) & =0 \\ det(\overrightarrow{A_sX},\vec{u}_s,\vec{u}_r\times\vec{u}_s) & =0 \end{cases}$ donde X es un punto genérico de dicha recta perpendicular
La distancia entre dos rectas que se cruzan es igual a la distancia entre los puntos de intersección de la perpendicular común con las rectas dadas.

Otro método para calcular la perpendicular común es el de los puntos genéricos:
Sean los puntos P_r y P_s los puntos intersección de la perpendicular común con las rectas *r* y *s* respectivamente.
El punto P_r tendrá como coordenadas genéricas las correspondientes a las ecuaciones paramétricas de la recta *r*: $P_r(x_1+a_1t,y_1+b_1t,z_1+c_1t)$
Análogamente, las coordenadas genéricas del punto P_s de la recta s: $P_s(x_2+a_2s,y_2+b_2s,z_2+c_2s)$
El vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$, luego: $\begin{cases} \overrightarrow{P_rP_s}\cdot\vec{u}_r & =0 \\ \overrightarrow{P_rP_s}\cdot\vec{u}_s & =0 \end{cases}$
Operando se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que son los parámetros *t* y *s*.

OpenCourseWare CC BY NC SA

Resuelto el sistema, se sustituyen los valores de t y s en las coordenadas de los puntos P_r y P_s, respectivamente.

Conocidos los puntos P_r y P_s, se calcula la ecuación de la perpendicular común p cuyo vector director es $\overrightarrow{P_rP_s}$ y la distancia entre las rectas r y s, que es $|\overrightarrow{P_rP_s}|$.

► ***Ejemplo 35 (A)***

Escribir la ecuación de la perpendicular común a las rectas $r: x = y = z$ y $s: x = y = 3z - 1$

Solución: Se tiene $A_r(0,0,0), \vec{u}_r = (1,1,1), A_s(-1,-1,0), \vec{u}_s = (3,3,1) \to \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-2,2,0)$

La perpendicular común p está determinada por la intersección de los planos:

$$det(\overrightarrow{A_rX}, \vec{u}_r, \vec{u}_r \times \vec{u}_s) = 0 \to \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x + y - 2z = 0$$

$$det(\overrightarrow{A_sX}, \vec{u}_s, \vec{u}_r \times \vec{u}_s) = 0 \to \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x + y - 6z + 2 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la perpendicular común es $p: \begin{cases} x + y - 2z & = 0 \\ x + y - 6z + 2 & = 0 \end{cases}$

Si aplicamos la técnica de los puntos genéricos de ambas rectas tenemos:

$P_r = (t,t,t), \ P_s = (3s-1, 3s-1, s) \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (3s-t-1, 3s-t-1, s-t)$

y como dicho vector es ortogonal a $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$:

$\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{u}_r = (3s-t-1, 3s-t-1, s-t) \cdot (1,1,1) = 0$

$\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{u}_s = (3s-t-1, 3s-t-1, s-t) \cdot (3,3,1) = 0$

Operando: $\begin{cases} 7s - 3t & = 2 \\ 19s - 7t & = 6 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t & = \dfrac{1}{2} \\ s & = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Los puntos correspondientes a dichos valores de t y s son $P_r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ P_s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Claramente ambos puntos coinciden, luego las rectas son secantes y la distancia entre ambas es cero.

La ecuación (en forma contínua o implícita) de la perpendicular común pasa por $P_r = (1/2, 1/2, 1/2)$ y tiene como vector director el formado por $\vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-2,2,0)$:

$$p: \frac{x - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{0} \qquad p: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\to\to$