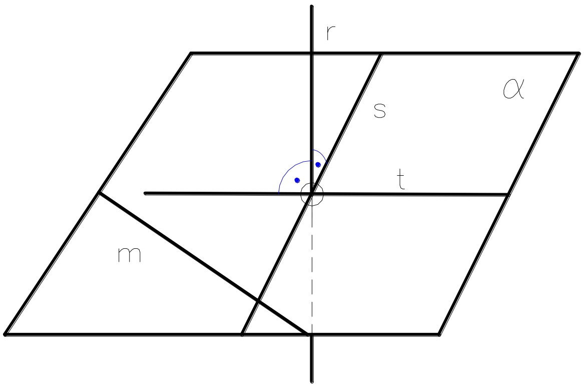
TEMA III: PERPENDICULARIDAD

3.1.D – Rectas y planos perpendiculares

Una recta es perpendicular a un plano cuando es perpendicular a dos rectas no paralelas que pasan por su pie.

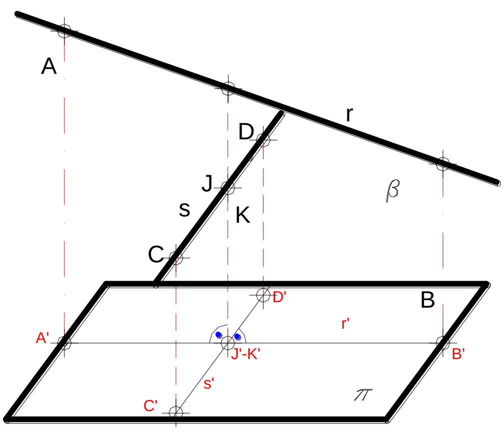


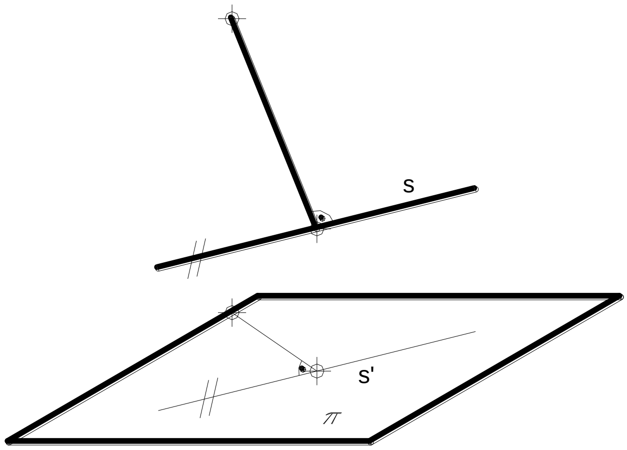
De lo anterior se desprende que: para que una recta sea perpendicular a un plano, basta que lo sea a dos rectas del plano no paralelas entre sí o a dos rectas paralelas al plano y no paralelas entre ellas. Según esto, si una recta es perpendicular a un plano, lo es a todas las rectas del plano.

Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular a una de ellas lo es también a la otra. Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno lo es también al otro. Según esto, dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos y dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

Si una recta es perpendicular a un plano, toda recta perpendicular a ella es paralela al plano o está contenida en él.

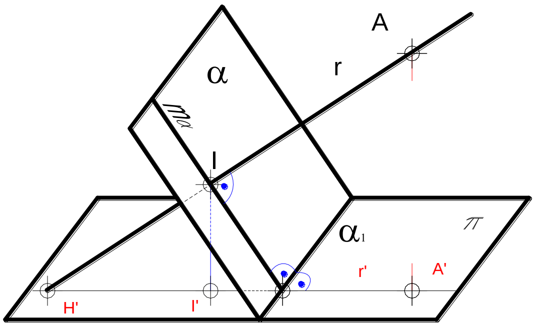
Un teorema importante para la resolución de la perpendicularidad en las proyecciones que nos ocupan es el teorema de las tres perpendiculares:
Si dos rectas son Perpendiculares en el espacio y una de ellas es paralela al plano de proyección, sobre ese plano se proyectan perpendicularmente

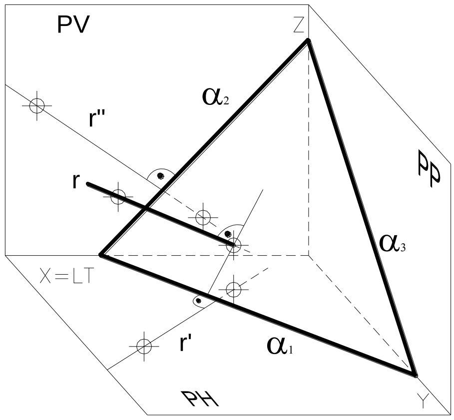




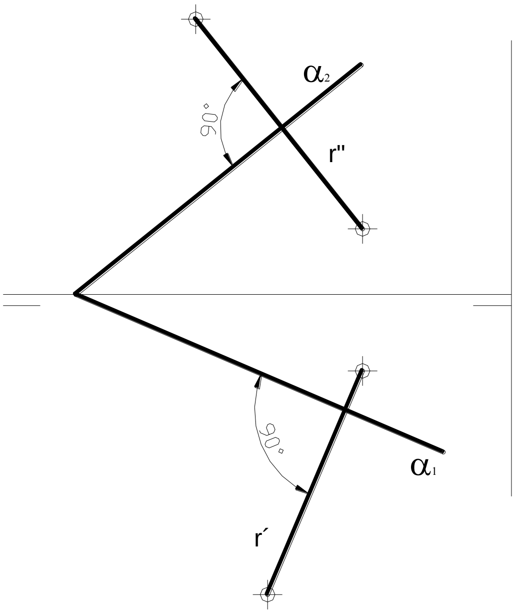
CORolario

Si una recta "r" es perpendicular a un plano **α,** *sus proyecciones y las trazas homónimas del plano son perpendiculares*





Según lo indicado anteriormente si una recta es perpendicular a un plano las proyecciones de las rectas son perpendiculares a las trazas homónimas del plano: **r'** es perpendicular a α_1 y **r''** es perpendicular a α_2.



3.1.A – Rectas y planos perpendiculares

Dada la recta *r* cuyo vector director es el vector $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y el plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ cuyo vector asociado es el vector $\vec{a}=(A,B,C)$ ambos son perpendiculares si el vector director de la recta y el vector asociado al plano son paralelos o lo que es lo mismo si el ángulo que forman es 0°.

Por tanto, la recta *r* y el plano π son perpendiculares si el seno del ángulo que forman es 0, es decir, $sen\theta=0$, o lo que es lo mismo si $\vec{u}$ y $\vec{a}$ son linealmente dependientes $\Rightarrow \frac{A}{u_1}=\frac{B}{u_2}=\frac{C}{u_3}$

3.1. Ejemplos comunes a ambas materias

► ***Ejemplo 17 (A)***

Calcular una recta que pasa por el punto $P(7,3,4)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos (8,0,0), (3,0,2) y (5,4,0) Hallar el punto de intersección entre ambos.

Solución: La ecuación implícita del plano α es de la forma:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-8 & y & z \\ 3-8 & 0-0 & 2-0 \\ 5-8 & 4-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \mapsto \alpha: 4x+3y+10z=32$$

La recta p se determina una vez conocido $\vec{n}_\alpha = (4,3,10) = \vec{u}_p$ y el punto $P(7,3,4)$:

$$p: \frac{x-7}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{10}$$

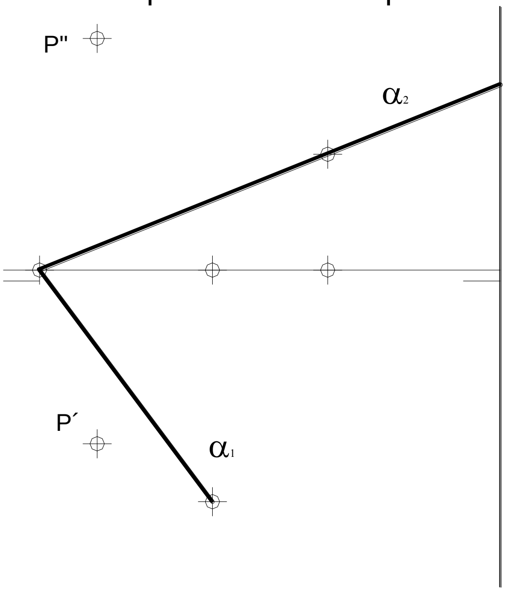
Para el punto A de intersección de p y α:

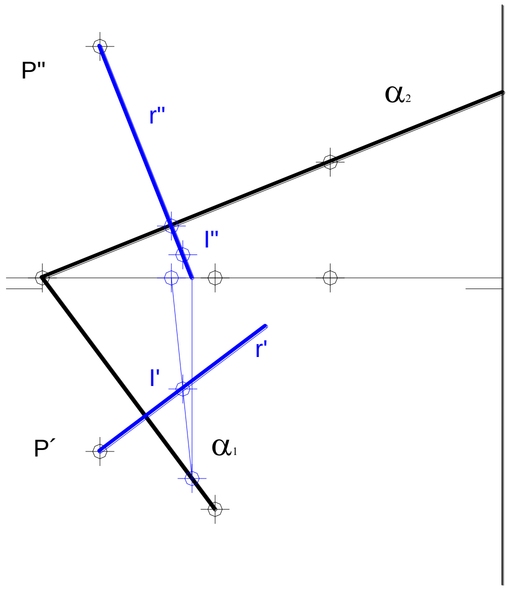
De todos los puntos $x=4t+7, y=3t+3, z=10t+4=32$ de la recta p hay uno que cumple la ecuación del plano α: $4(4t+7)+3(3t+3)+10(10t+4)=32 \mapsto t=-9/25$ por lo que: $A\left(\frac{139}{5}, \frac{48}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Ejemplo 18 (D)

Trazar por el punto P una recta perpendicular al plano α.Hallar el punto de intersección.

Solución: La recta r solución tiene la proyección vertical perpendicular a α_2 y su proyección horizontal perpendicualar a α_1. Para hallar la intersección se siguen los procedimientos explicados en el capítulo anterior.





Ejemplo 19 (A)

Calcular un plano α perpendicular a la recta $r\,((9,0,2),(7,4,5))$ que pasa por $P(11,2,4)$. Hallar el punto de intersección entre ambos

Solución: La ecuación contínua de la recta es de la forma:

$$r: \frac{x-9}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3}$$

El plano α pedido tendrá como vector normal $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{u_r} = (-2,4,3)$ y pasará por el punto $P = (11,2,4)$:

$$\alpha : -2(x-11)+4(y-2)+3(z-4)=0 \mapsto -2x+4y+3z+2=0$$

Para el punto A de intersección de r y α:

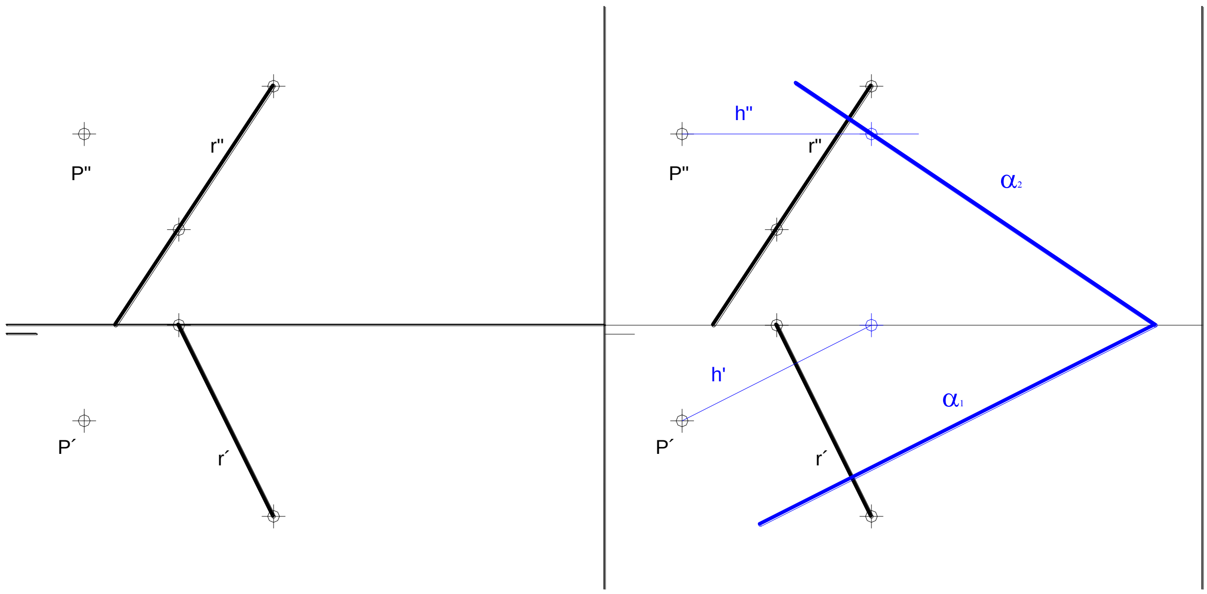
De todos los puntos genéricos $(x = -2t+9, y = 4t, z = 3t+2)$ de la recta r hay uno que cumple la ecuación del plano α, que corresponde a $t = 10/29$, por lo que el punto de intersección de la recta y el plano es:

$$A\left(\frac{241}{29}, \frac{40}{29}, \frac{88}{29}\right)$$

► ***Ejemplo 20 (D)***

Trazar por el punto **P** un plano perpendicular a la recta **r.**

Solución: el plano solución tiene α_1 perpendicular a **r’** y su α_2 a **r”**. Para hallar las trazas del plano se traza una horizontal **h** o una frontal **f** que son paralelas a las trazas horizontal y vertical respectivamente. En este caso se ha trazado una horizontal del plano solución y a partir de esta recta se han hallado las trazas



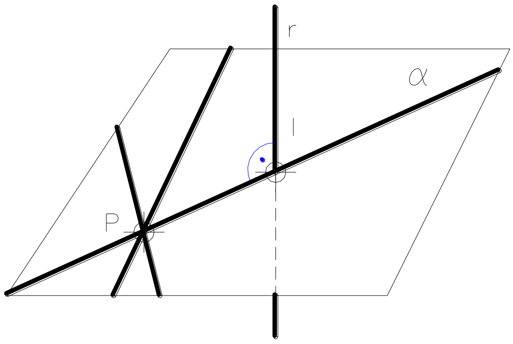
3.2.D – Rectas perpendiculares

Todas las rectas perpendiculares a otra están en un plano perpendicular a ella.

► ***Ejemplo 21 (D)***

Trazar por el punto **P** una recta perpendicular y que corte a la recta **r**

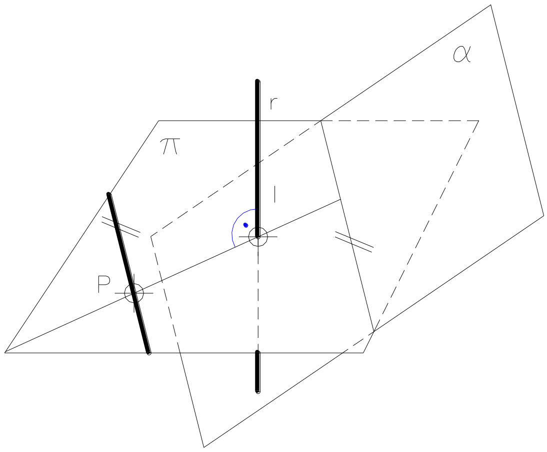
Solución: se traza por el punto un plano perpendicular a la recta. El punto de intersccción de la recta y el plano y el punto **P** definen la recta solución.



► ***Ejemplo 22 (D)***

Trazar por el punto **P** una recta perpendicular a la recta **r** y paralela al plano α

Solución: se traza por el punto un plano perpendicular a la recta. Se halla la intersección de los dos planos. La solución es la recta que pasa por **P** y es paalela a la recta intersección de ambos planos.



3.2.A – Rectas perpendiculares

Dada la recta *r* cuyo vector director es el vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y la recta *s* cuyo vector director es el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ambas rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares o lo que es lo mismo si el ángulo que forman es 90°.

Por tanto, las rectas r y s son perpendiculares si el coseno del ángulo que forman es 0, es decir, $\cos\theta = 0 \Rightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

► ***Ejemplo 23 (A)***

Calcular por $P(12,3,6)$ una recta que corte y sea perpendicular a la recta $r: \frac{x-6}{-6} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{3}$ y hallar el punto de intersección entre ambas

Solución: Se define el plano α que pasa por P y tiene por vector director el de la recta r

$$\alpha: -6(x-12)+3(y-3)+3(z-6)=0 \mapsto \alpha: -2x+y+z+15=0$$

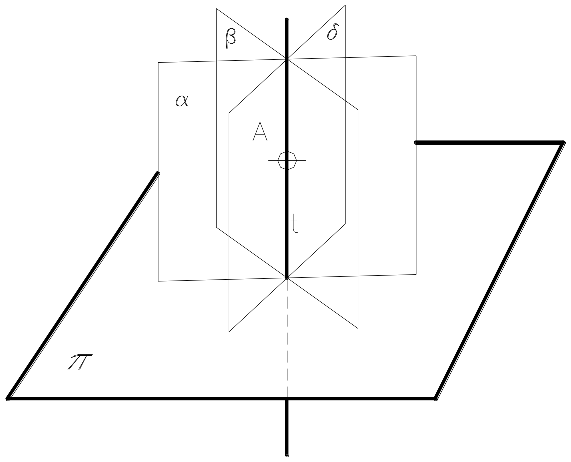
Se obtiene la intersección Q entre el plano α y la recta r

$-2(6-6t)+1(5+3t)+1(4+3t)+15=0 \;\rightarrow\; t=-2/3$, por lo que $Q=(10,3,2)$

La perpendicular solicitada es la recta que pasa por P y Q $\rightarrow$ $p: \begin{cases} y = 3 \\ 2x - z = 18 \end{cases}$

3.3.D – Planos perpendiculares

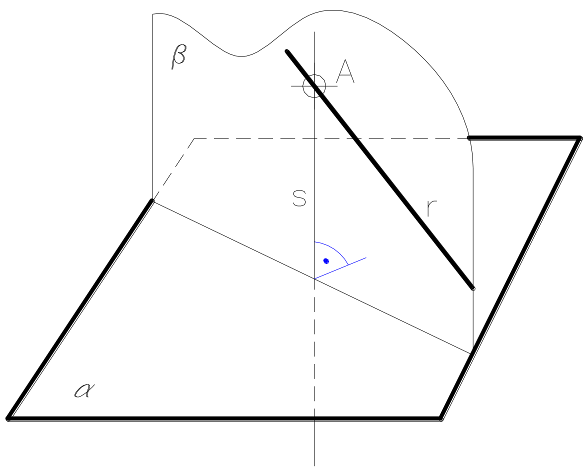
Si un plano es perpendicular a otro tiene que contener a una recta perpendicular a él. Por un punto se pueden trazar infinitos planos (haz de planos) cuya recta intersección es perpendicular al plano.



► ***Ejemplo 24 (D)***

Trazar un plano que contenga a la recta **r** y sea perpendicpular al plano α

Solución: se traza por un punto de la recta r una recta s perpendicular al plano. Las dos rectas define el plano solución.



3.3.A – Planos perpendiculares

Dado el plano $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ cuyo vector asociado es el vector $\overrightarrow{a_1}=(A_1,B_1,C_1)$ y el plano $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ cuyo vector asociado es el vector $\overrightarrow{a_2}=(A_2,B_2,C_2)$, ambas planos son perpendiculares si sus vectores asociados son perpendiculares o lo que es lo mismo si el ángulo que forman es $90°$.

Por tanto, los planos π_1 y π_2 son perpendiculares si el coseno del ángulo que forman es 0, es decir, $\cos\theta=0 \Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

► *Ejemplo 25 (A)*

Trazar por $P(4,3,1)$ planos perpendiculares a $\alpha: 5x+6y+4z=50$ y paralelos a la recta r definida por los puntos $(6,5,4)$ y $(0,8,7)$

Solución: Los planos β perpendiculares a α y que contienen el punto P(4,3,1) son de la forma $\beta: A(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0$, donde el producto escalar de los vectores normales a cada plano debe de ser nulo, esto es:

$$(A,B;C)\cdot(5,6,4)=0 \mapsto A=\frac{-6B-4C}{5}$$

De manera que la ecuación general de β es de la forma

$$\beta: \frac{-6B-4C}{5}(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0, \forall\, B,C\ \in R$$

Por otro lado, un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(-2,1,1)$. Como el plano solicitado β es paralelo a la recta r, $\overrightarrow{n_\beta}$ y $\overrightarrow{v_r}$ son perpendiculares, esto es: $\overrightarrow{n_\beta}.\overrightarrow{v_r}=0$, de donde se obtiene que $B=\frac{-13C}{17}$.

Sustituyendo ahora las expresiones de B y A en la ecuación del plano β y simplificando se calcula la ecuación del plano β pedido:

$$\beta: 2x-13y+17z+14=0$$