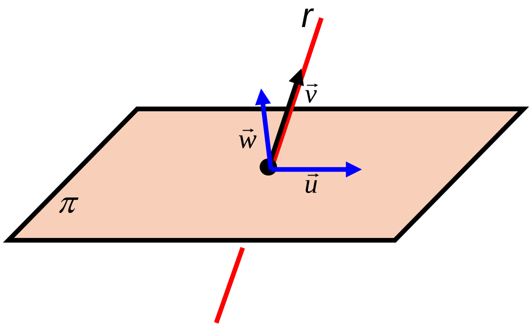
sea el plano π definido por sus ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

donde $Q = (q_1, q_2, q_3)$ es un punto cualquiera del plano y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ sus vectores directores. Se puede estudiar la posición relativa entre la recta r y el plano π en función de sus vectores directores de la siguiente manera:

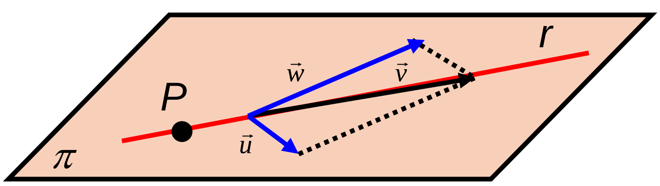
a. <u>Recta y plano secantes</u>
Si el vector director de la recta y los vectores directores del plano son linealmente independientes, la recta y el plano son secantes. En este caso se cumple que $rg \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 3$



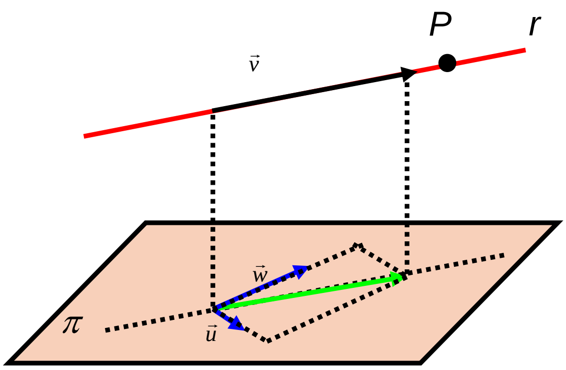
b. <u>Recta contenida en el plano y recta paralela al plano</u>
Si el vector director de la recta es combinación lineal de los vectores directores del plano, la recta está contenida en el plano o es paralela a él. En ambos casos se cumple que $rg \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$

Para distinguir los dos casos, se toma un punto cualquiera de la recta y se sustituyen sus coordenadas en la ecuación del plano de forma que si se satisface, la recta está contenida en el plano y si no se satisface, la recta es paralela al plano.

Plano y recta incidentes



Plano y recta paralelos



► ***Ejemplo 13 (A)***

Estudiar las posiciones relativas del plano $\alpha: x+ay-z=1$ y la recta $r:\begin{cases} 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases}$ según los valores del parámetro real a.

Solución: Formamos el sistema $r\cap\alpha:\begin{cases} x+ay-z-1=0 \\ 2x+y-az-2=0 \\ x-y-z-a+1=0 \end{cases}$

donde $M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0\Rightarrow rg(M)\geq 2$; $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-a^2+a+2$

$-a^2+a+2=0\Rightarrow (a-2)(a+1)=0$

- Si $a\neq 2$ y $a\neq -1$ $\Rightarrow rg(M)=3=rg(M')\Rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto
- Si $a=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow rg(M)=2=rg(M')\Rightarrow$ la recta está contenida en el plano
- Si $a=-1$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=9\neq 0\Rightarrow rg(M)=2\neq rg(M')=3\Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos

2.3. Ejemplos comunes a ambas materias

► *Ejemplo 14 (A)*

Indicar la posición relativa entre la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ y el plano $\alpha: 2x - 3y + z + 1 = 0$

Solución: obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$r: \begin{cases} x = y \\ x = z+1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

La intersección entre la recta y el plano es $r \cap \alpha: \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$

donde $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Estudiamos el rango de las matrices M y M'

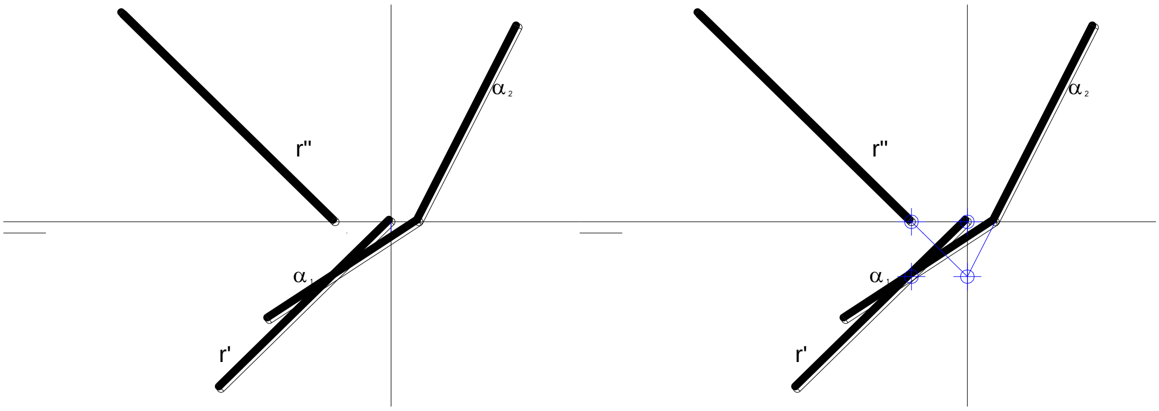
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(M) \geq 2 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(M) = 2 = rg(M')$$

Por lo tanto, la recta está contenida en el plano

► *Ejemplo 14 (D)*

Comprobar la posición de la recta r y el plano α

Solución: Como se observa las trazas de la recta se encuentran en las trazas homónimas del plano. Por lo tanto la recta pertenece al plano



► ***Ejemplo 15 (A)***

Determinar el valor del parámetro real b para que la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{b} = \frac{z+3}{2}$ no corte al plano $\alpha: 2x - 4y + 5z = 6$

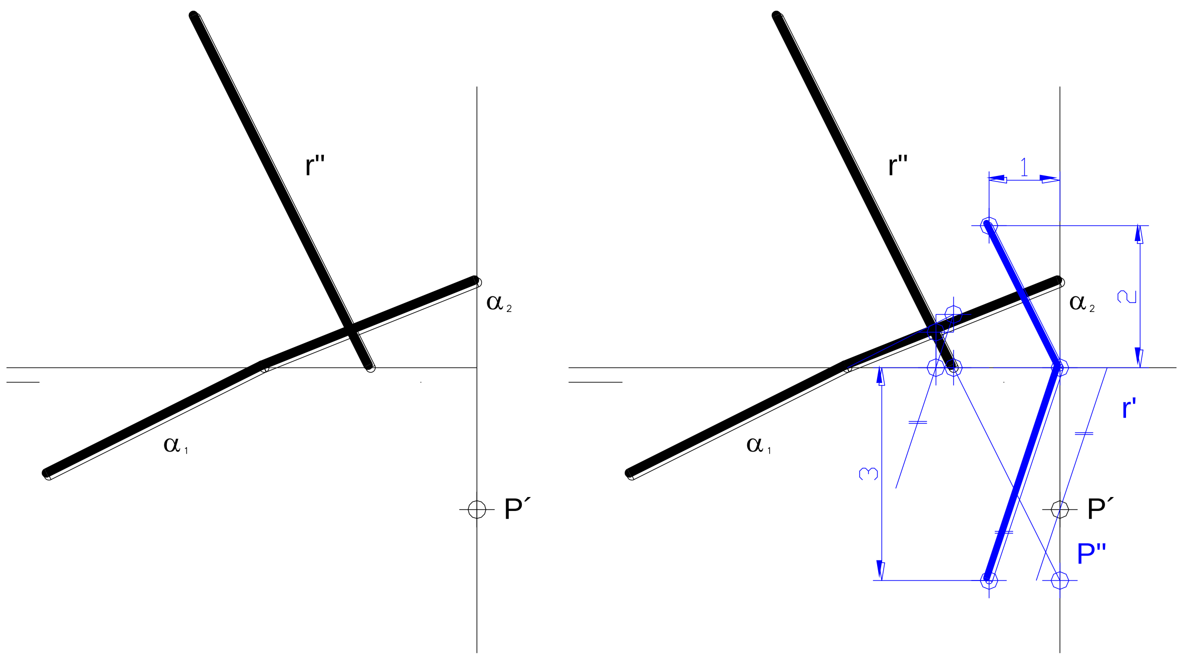
Solución: Para que una recta y un plano no se corten deben ser paralelos, por lo que el vector director de la recta y el vector asociado o normal al plano deben ser perpendiculares (su producto escalar debe valer cero).

El vector director de la recta es $\vec{u} = (1, b, 2)$ y el vector normal al plano $\vec{a} = (2, -4, 5)$

$\vec{u} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow (1, b, 2) \cdot (2, -4, 5) = 0 \Rightarrow 2 - 4b + 10 = 0 \Rightarrow b = 3$

► ***Ejemplo 15 (D)***

Hallar r' y P" para que r sea paralela a el plano α. Determinar el parámetro que falta (coordenada "y" del vector director de la recta).



► ***Ejemplo 16 (A)***

Determinar la intersección de la recta $r: \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$ y el plano $\alpha: x - 13y - 8z + 41 = 0$

Solución: Calculamos la intersección de la recta y el plano resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$r \cap \alpha : \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 2z = 7 \\ x - 13y - 8z = -41 \end{cases} \rightarrow x = \frac{91}{23}\ ,\ y = \frac{58}{23}\ ,\ z = \frac{35}{23}$$

► *Ejemplo 16 (D)*

Determinar la intersección de la recta r y el plano ABC