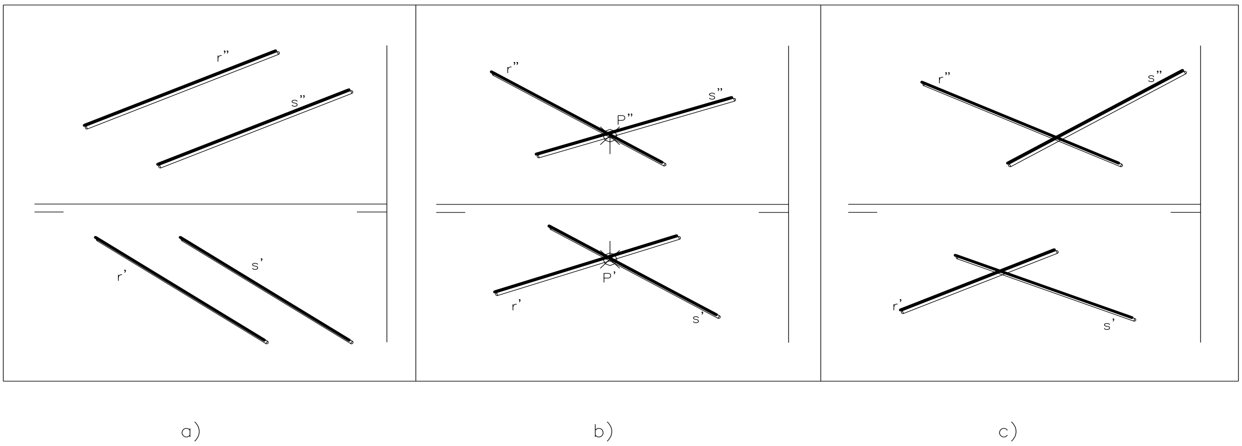
2.1.D – Entre dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden ser:

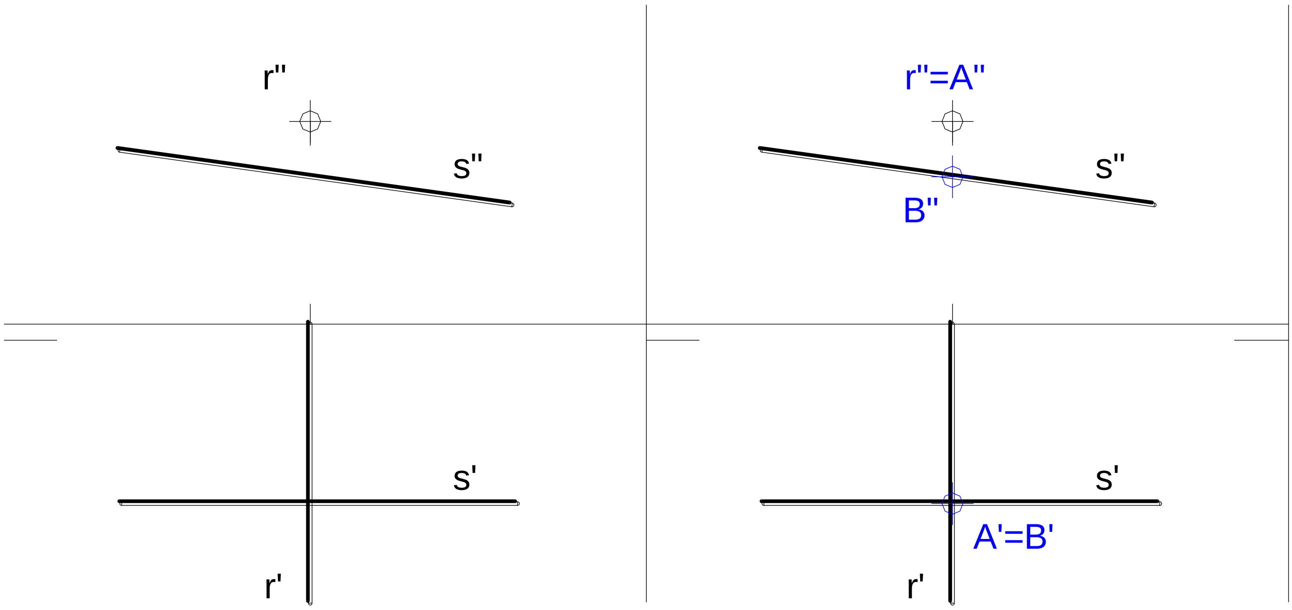
a) paralelas (sus proyecciones homónimas son paralelas)
b) secantes (tienen un único punto en común)
c) o cruzarse



► *Ejemplo 4 (D)*

Dadas las rectas r y s, determinar y justificar qué tipo de posición ocupan entre ellas.

Solución: Las rectas se cruzan porque las proyecciones verticales de ambas no tienen ningún punto en común.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

2.1.A – Entre dos rectas

Por geometría elemental, se sabe que las posiciones de dos rectas en el espacio son:

a) rectas secantes: tienen un punto en común
b) rectas paralelas: no tienen ningún punto en común y ambas rectas están en un mismo plano
c) rectas que se cruzan: no tienen ningún punto en común y no están situadas en un mismo plano
d) rectas coincidentes: tienen todos los puntos en común

Véanse a continuación las condiciones necesarias y suficientes para distinguir cada uno de los casos haciendo un estudio analítico:

2.1.A.1.- Determinación de las posiciones relativas entre dos rectas cuando están definidas por sus ecuaciones implícitas

Considérense las rectas r y s dadas por sus ecuaciones implícitas:

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

La intersección de ambas rectas será el sistema $r\cap s:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$

en el que la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada M' son:

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad M'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

El mínimo rango que puede tener M es 2, ya que los dos primeros planos y los dos últimos son secantes. Según los rangos de M y M' se tienen diferentes casos, cuyo estudio se reduce a la discusión del sistema:

	Rango de M	*Rango de M'*	*Sistema*	*Posición de las rectas*
Caso 1	3	4	Incompatible	Rectas que se cruzan
Caso 2	3	3	Compatible determinado	Rectas secantes
Caso 3	2	3	Incompatible	Rectas paralelas
Caso 4	2	2	Compatible indeterminado	Rectas coincidentes

2.1.A.2.- Determinación de las posiciones relativas entre dos rectas cuando están definidas en forma paramétrica

Sean las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s :

$$r:\begin{cases} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda b_1 \\ z = z_1 + \lambda c_1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = x_2 + \mu a_2 \\ y = y_2 + \mu b_2 \\ z = z_2 + \mu c_2 \end{cases}$$

donde $A_r = (x_1, y_{1,}, z_1)$ y $A_s = (x_2, y_{2,}, z_2)$ son dos puntos de las rectas r y s respectivamente y $\vec{v}_r = (a_1, b_{1,}, c_1)$ un vector director de la recta r y $\vec{v}_s = (a_2, b_{2,}, c_2)$ un vector director de la recta s. Se forma el vector $\overrightarrow{A_rA_s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Según la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ se tienen los siguientes casos:

<u>*Caso 1*</u>: $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 \neq rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 3$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son paralelos, luego las rectas pueden cruzarse o cortarse. Como $rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 3$, las rectas están en distintos planos, luego se cruzan.

<u>*Caso 2*</u>: $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2 = rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right)$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son paralelos, luego las rectas pueden cruzarse o cortase. Como $rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$, las rectas están en el mismo plano y se cortan.

El punto común de las dos rectas que se cortan se obtiene resolviendo el sistema formado al igualar los valores x, y y z de las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$r \cap s:\begin{cases} x_1 + \lambda a_1 = x_2 + \mu a_2 \\ y_1 + \lambda b_1 = y_2 + \mu b_2 \\ z_1 + \lambda c_1 = z_2 + \mu c_2 \end{cases}$$

Calculados los valores de λ y μ, se sustituye cualquiera de ellos en la ecuación de la recta correspondiente; de este modo se hallan las coordenadas del punto intersección.

<u>*Caso 3*</u>: $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 1 \neq rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son paralelos, luego las rectas también lo son. Como $rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$, las rectas no pueden coincidir; son paralelas y distintas.

<u>*Caso 4*</u>: $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 1 = rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right)$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son paralelos, luego las rectas también lo son. Como $rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = 2$, las rectas son coincidentes.

► ***Ejemplo 5 (A)***

Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r:\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{y} \quad p:\begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -2s \\ z = 7 + 6s \end{cases}$$

Solución: De las ecuaciones dadas se obtienen los puntos y vectores directores de las rectas:

$$A_r = (0,2,1), \qquad \vec{v}_r = (1,-1,3), \qquad A_p = (2,0,7), \qquad \vec{v}_p = (2,-2,6)$$

y se obtiene el vector $\overrightarrow{A_rA_p} = (2,-2,6)$.

Se calculan los siguientes rangos:

$$rg(\vec{v}_r, \vec{v}_p) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 1 \qquad rg(\vec{v}_r, \vec{v}_p, \overrightarrow{A_rA_p}) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 1$$

Como $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_p) = 1 = rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_p})$, las rectas son coincidentes.

► ***Ejemplo 6 (A)***

A partir de las ecuaciones implícitas de las rectas r y s, obtener los valores reales de a de manera que ambas rectas se crucen en el espacio:

$$r:\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} 2ax + y + z = 1/2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

Solución:

Se calculan los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada del sistema $r \cap s$:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Para obtener el rango de la matriz ampliada, se calcula su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2a & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 6a$$

Para que las rectas r y s se crucen en el espacio sin estar en el mismo plano, se debe cumplir que este determinante no sea nulo para que $rg(M')$ sea 4.

Por tanto, $4 - 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq 2/3$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

►*Ejemplo 7 (A)*

Se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Estudiar su posición y si tienen algún punto en común.

Solución: De las ecuaciones dadas se obtienen un punto y un vector director de cada una de las rectas:

$$A_r = (1,2,1), \qquad \vec{v}_r = (1,1,2) \qquad A_s = (3,3,-1), \qquad \vec{v}_s = (-2,-1,2)$$

y se obtiene el vector $\overrightarrow{A_r A_s} = (2,1,-2)$.

Se calculan los siguientes rangos:

$$rg(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_r A_s}\right) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como $rg(\vec{v}_r, \vec{v}_p) = 2 \neq rg\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_r A_p}\right) = 3$, las rectas son secantes.

A continuación se obtiene el punto común a ambas rectas. Para ello se calculan sus ecuaciones paramétricas

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ y } \quad s: \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 3 - s \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

Igualando ambas ecuaciones, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - 2s \\ 2 + t = 3 - s \\ 1 + 2t = -1 + 2s \end{cases}$$

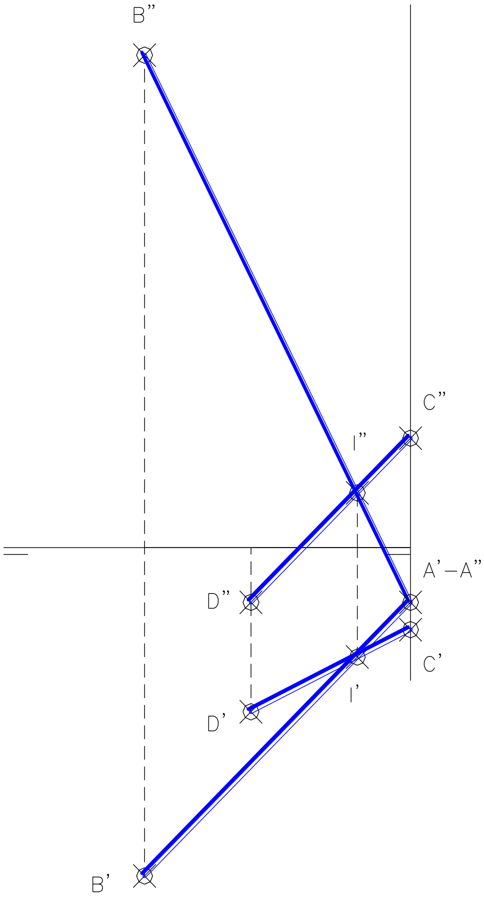
cuya solución es $t = 0$ y $s = 1$.

Sustituyendo estos valores en cualquiera de las dos rectas se obtiene el punto de intersección de ambas rectas $P = (1,2,1)$.

►***Ejemplo 7 (D)***

Determinar la posición relativa de r y s

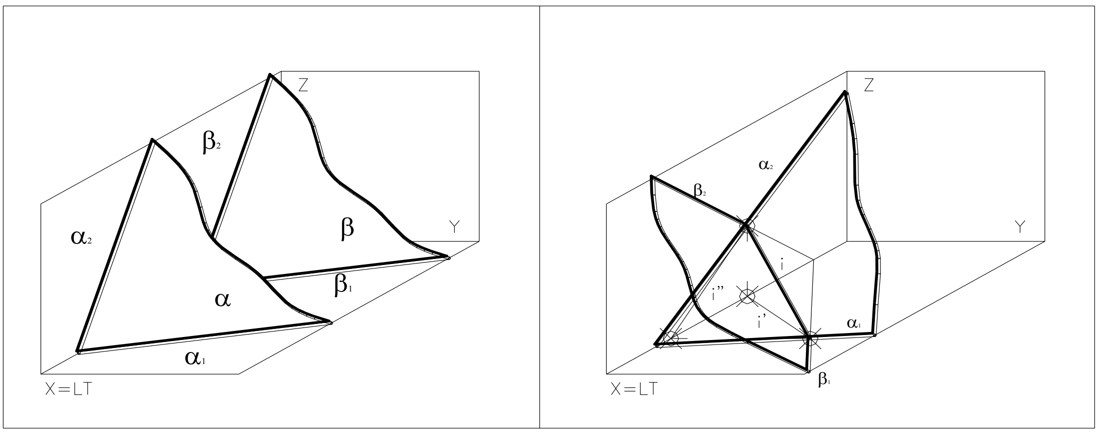
Solución: Las rectas se cortan en un punto, donde se cortan las proyecciones horizontales y verticales.



2.2.D – Entre dos planos

Dos planos pueden adoptar dos posiciones: paralelos y secantes

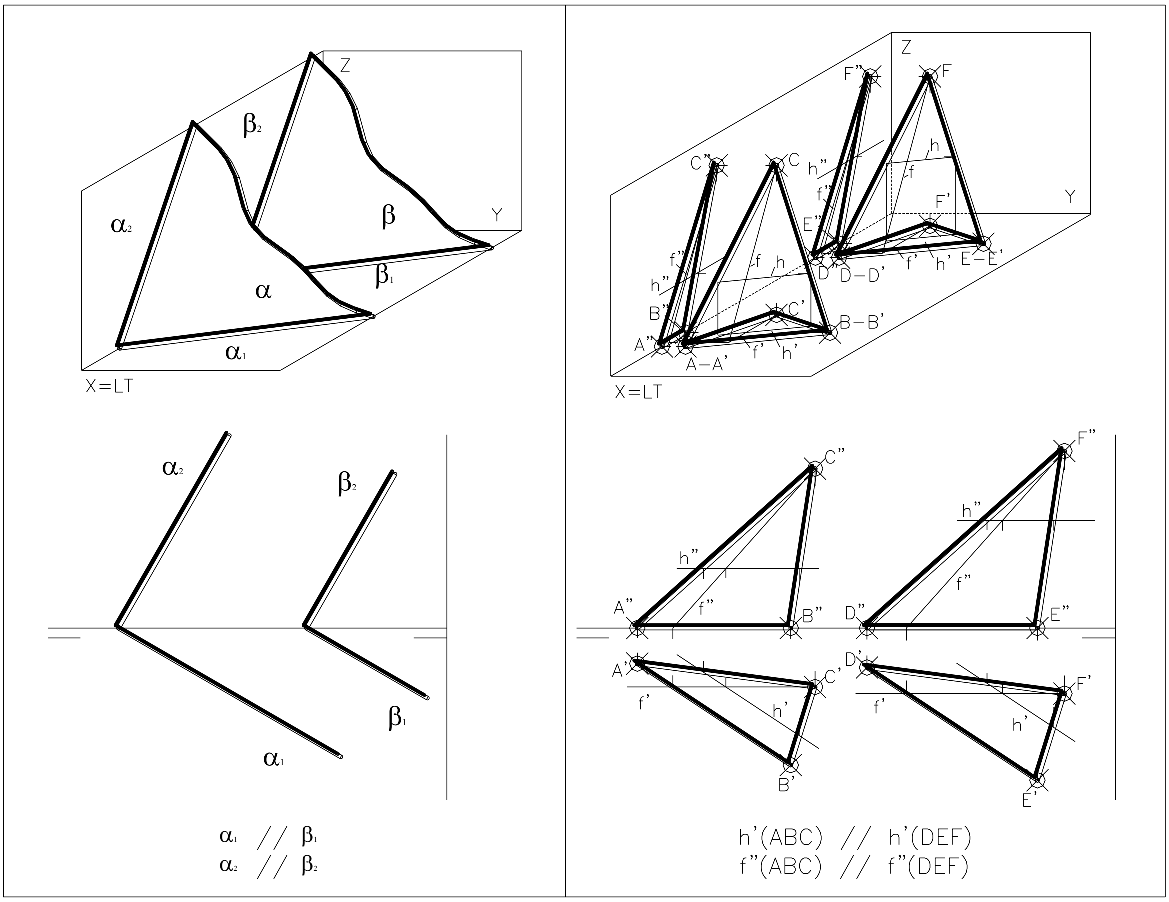
a) Planos paralelos (no tienen ningún punto en común)



a) b)

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

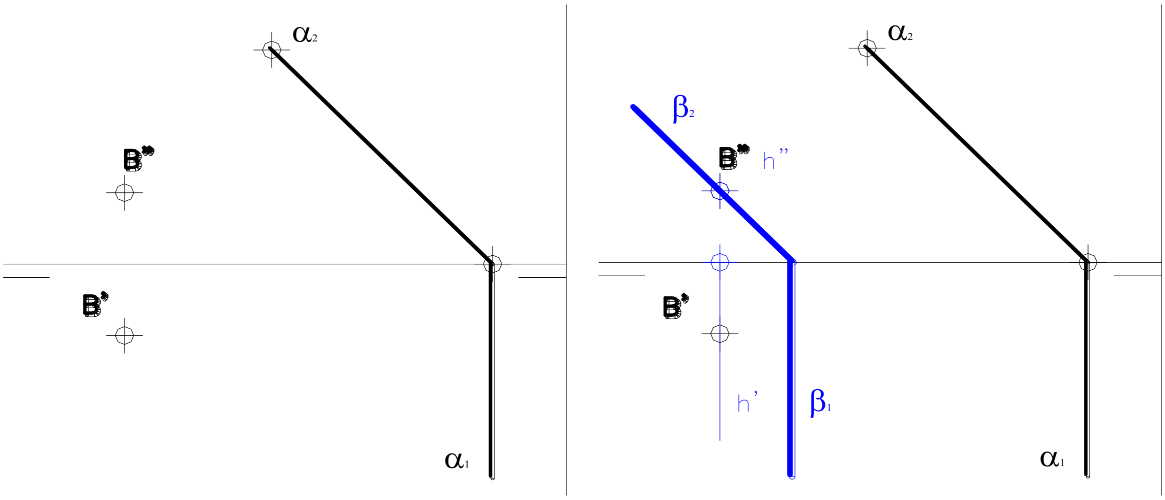
Si dos planos son paralelos sus trazas homónimas también lo son. De la misma forma las proyecciones homónimas de sus horizontales y sus frontales también.



a)

► ***Ejemplo 8 (D)***

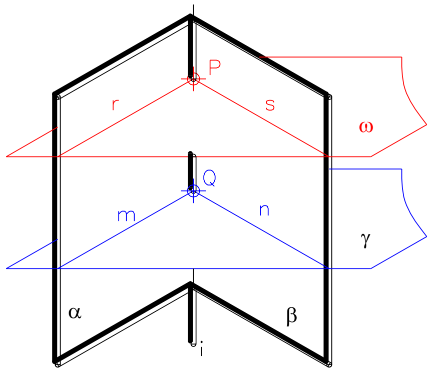
Dado el punto B, definir el plano que lo contiene y que es paralelo al plano a.

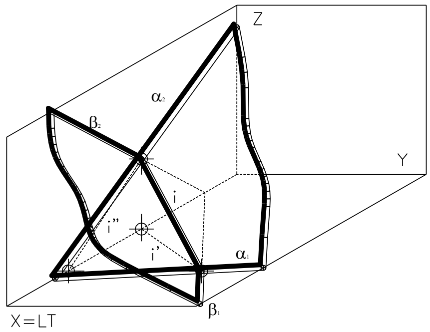


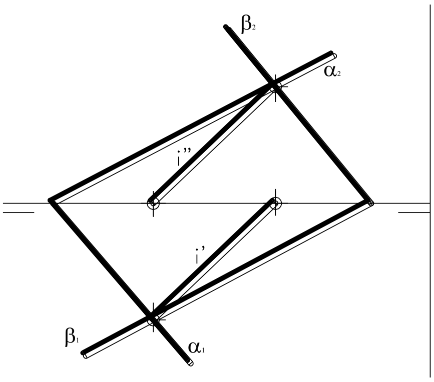
b) Planos secantes (se cortan mediante una recta, "i" en la figura)

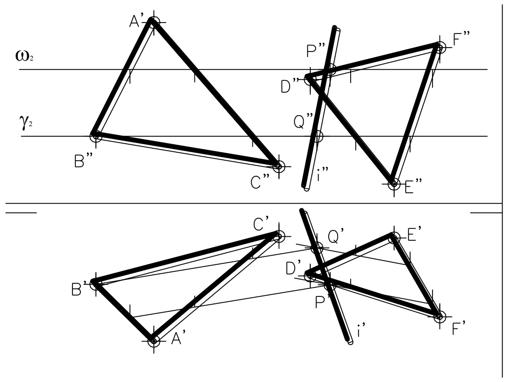
La recta intersección de dos planos en los casos generales se determina utilizando dos planos auxiliares:

- Si se conocen las trazas de los planos, se toman como planos auxiliares los dos planos de proyección XY y XZ, por lo que basta con determinar la intersección entre las trazas.
- Si no se conocen las trazas se utilizan dos planos cualesquiera en general paralelos a los planos de proyección o a los ejes de coordenadas.

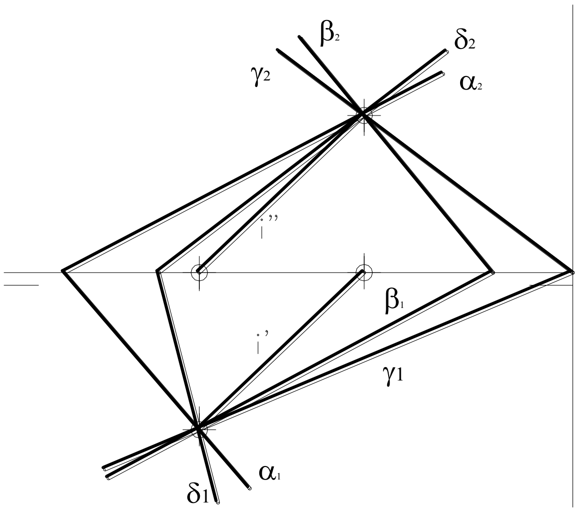


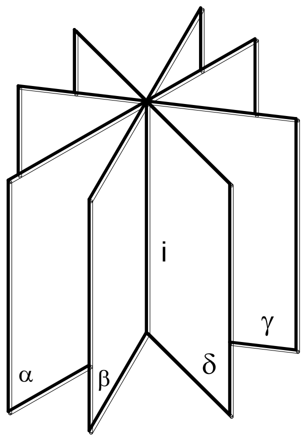






Se define haz de plano como el conjunto de planos que se cortan en la misma recta.

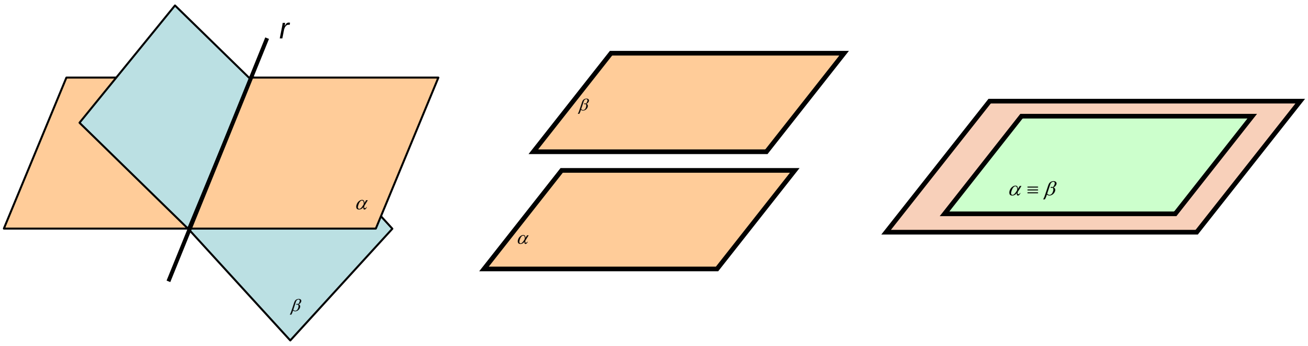




2.2.A – Entre dos planos

Por geometría elemental se sabe que las posiciones de dos planos en el espacio son:

a) planos secantes: tienen en común los puntos de una recta
b) planos paralelos: no tienen ningún punto en común
c) planos coincidentes: tienen todos sus puntos en común



Véanse a continuación las condiciones necesarias y suficientes para distinguir cada uno de los casos haciendo un estudio analítico según las diferentes formas de expresar el plano.

Expresión analítica:

Considérense los planos dados por las ecuaciones generales:

$$\begin{aligned} \alpha &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \beta &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Estudiar las posiciones de estos dos planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones lineales. La matriz de los coeficientes, M, y la ampliada M', son:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Según los valores de los rangos de M y M', se presentan los siguientes casos:

<u>*Caso 1*</u>: rg(M)=2 y rg(M')=2

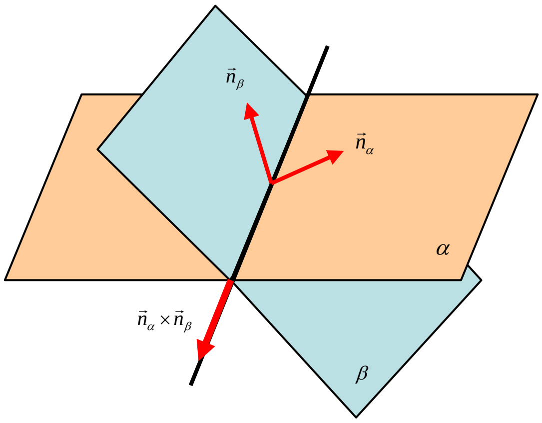
El sistema es compatible indeterminado con un grado de indeterminación. Las infinitas soluciones dependen de un parámetro. Por tanto, los dos planos se cortan en una recta y son secantes.

Se tiene así una nueva forma de expresar una recta: como intersección de dos planos secantes.

Se dice que el sistema formado por los dos planos secantes son las ecuaciones implícitas de la recta que determinan.

El vector direccional o director de la recta r en que se cortan ambos planos es

$$\vec{u}_r = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$$



Un punto de la recta se obtiene dando a x, y o z un valor cualquiera y resolviendo el sistema resultante para las otras dos incógnitas.

Conocidos un punto y el vector direccional de la recta se puede escribir su ecuación en forma vectorial, paramétrica o continua.

Caso 2: rg(M)=1 y rg(M')=2

El sistema es incompatible. Los planos no tienen ningún punto en común; por tanto, son paralelos y distintos.

Caso 3: rg(M)=1 y rg(M')=1

El sistema es compatible indeterminado. Las dos ecuaciones son linealmente dependientes y tienen las mismas soluciones. Por tanto, los planos tienen todos sus puntos en común; es decir, son coincidentes.

	Rango de M	Rango de M'	Sistema	Posición de dos planos
Caso 1	2	2	Compatible Indeterminado	Planos secantes
Caso 2	1	2	Incompatible	Planos paralelos
Caso 3	1	1	Compatible indeterminado	Planos coincidentes

En la práctica, para ver la posición de dos planos en forma general se observa la proporcionalidad o no de los coeficientes y de los términos independientes:

1. Coeficientes no proporcionales: planos secantes.
2. Coeficientes proporcionales y términos independientes no: planos paralelos.
3. Coeficientes y términos independientes proporcionales: planos coincidentes.

Haz de planos paralelos

Dada la ecuación implícita de un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

los planos paralelos al mismo son de la forma

$$Ax + By + Cz + K = 0, K \in R$$

ya que todos ellos tienen el mismo vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$.

Se llama haz de planos paralelos al conjunto de planos paralelos a uno dado.

El haz de planos queda determinado por un plano cualquiera del mismo. Su ecuación es

$$Ax + By + Cz + K = 0, K \in R$$

Determinación de planos por haces de planos paralelos se utiliza cuando se desea conocer:

a) La ecuación de plano que pasa por el punto P(x_1, y_1, z_1) y además es paralelo al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$.

b) La ecuación de plano que pasa por el punto P(x_1, y_1, z_1) y es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C)$.

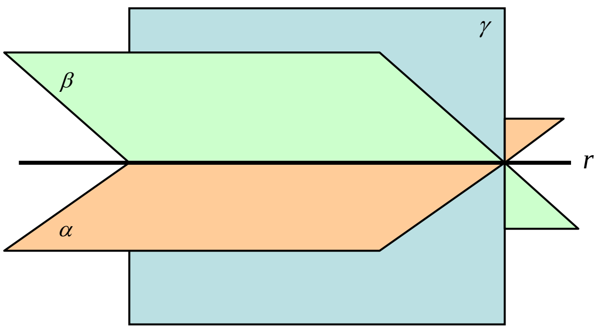
c) La ecuación del plano que pasa por el punto P(x_1, y_1, z_1) y es perpendicular a la recta

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z}{C}$$

Haz de planos secantes

Si dos planos dados por sus ecuaciones se cortan en una recta r y un tercer plano pasa por esa recta, entonces las soluciones comunes de los dos primeros planos lo son también del tercero, luego éste es combinación lineal de ellos y se puede escribir que:

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$



Para s=0 se obtiene el primer plano y para t=0 se obtiene el segundo de los planos. Análogamente, la ecuación de cualquier plano que pase por la recta intersección tiene las mismas soluciones.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Se llama haz de planos secantes al conjunto de planos que pasan por una recta que se denomina arista del haz.

El haz de planos queda determinado por dos planos distintos del mismo. Su ecuación es

$$t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad t, s \in R$$

o también, simbólicamente,

$$\mathbf{t}\alpha + \mathbf{s}\beta = 0$$

Determinación de planos por haces

Un problema típico de aplicación de los haces de planos secantes es cuando se desea obtener la ecuación del plano que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y contiene a la recta determinada por los planos

$$\begin{aligned} \alpha &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \beta &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Se supone que el punto no pertenece a ninguno de los dos planos. Si el plano contiene a la recta determinada por los planos α y β, entonces pertenece al haz determinado por ellos, es decir, es de la forma

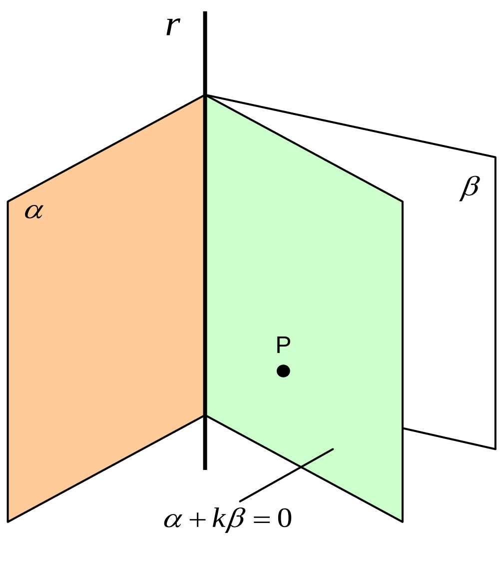
$$\mathbf{t}\alpha + \mathbf{s}\beta = 0$$

La relación entre los parámetros t y s se halla sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación del haz:

$$t(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + s(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0$$

Operando se obtiene una relación de la forma $s = kt$, siendo k un número. Llevando este valor a la ecuación del haz resulta la ecuación del plano pedido:

$$\mathbf{t}\alpha + \mathbf{kt}\beta = 0 \mapsto \alpha + \mathbf{k}\beta = 0$$



► ***Ejemplo 9 (A)***

Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\alpha &: x+y-5z &&= -4\\ \beta &: -3x-3y+15z &&= 12\end{aligned}$$

Solución: En el sistema formado por las ecuaciones rg(M)=1 y rg(M')=1; luego es compatible y además se reduce a una ecuación por ser las dos ecuaciones completamente proporcionales. Los planos son coincidentes.

2.2. Ejemplos comunes a ambas materias

► ***Ejemplo 10 (A)***

Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\alpha &: x+y-5z &&= -4\\ \beta &: 3x-y+25z &&= 1\end{aligned}$$

Solución: Como el rg(M)=rg(M')=2, el sistema formado por los planos es un sistema compatible. Los dos planos se cortan en una recta, que es la recta de solución del sistema. Un vector director de la recta es el determinado por el producto vectorial de los vectores normales de los planos α y β:

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = 3\vec{i} - 17\vec{j} - 4\vec{k}$$

Por último para obtener la ecuación de la recta basta con tomar un punto cualquiera de la intersección de ambos planos. Si la variable z vale 5, se resuelve un pequeño sistema lineal del que se obtiene damos los valores $x=3$ e $y=18$. Sólo falta por escribir la recta solución en forma continua:

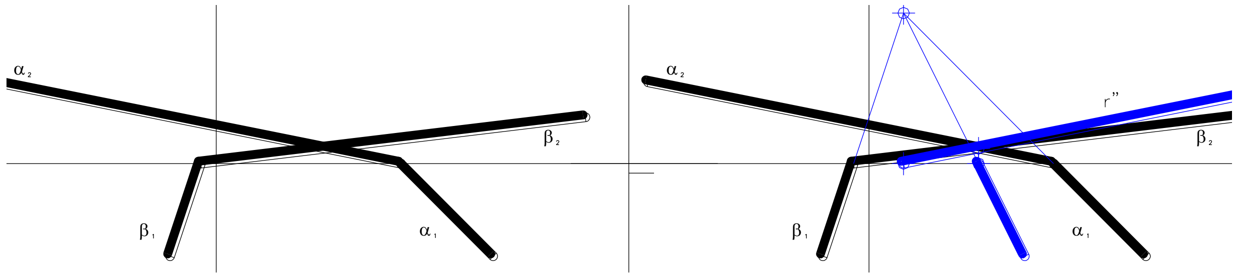
$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-18}{-17} = \frac{z-5}{-4}$$

► ***Ejemplo 10 (D)***

Estudiar la posición relativa de los planos a y b

Solución: Se cortan en la recta r

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe



► *Ejemplo 11 (A)*

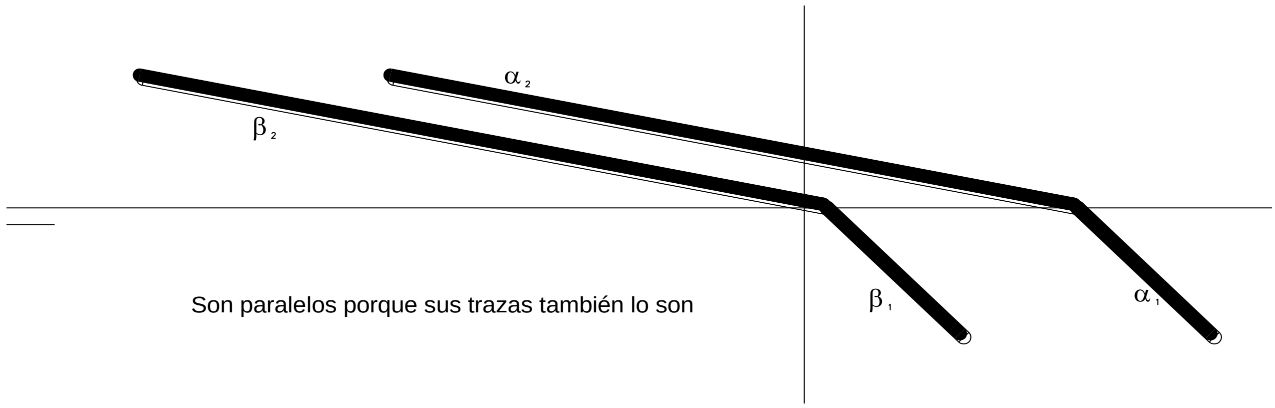
Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\alpha : x + y - 5z = -4$$
$$\beta : -3x - 3y + 15z = 1$$

Solución: Como el rg(M)=1 y rg(M')=2, el sistema formado por los planos es un sistema incompatible. Los planos son paralelos y distintos pues las dos ecuaciones no son completamente proporcionales.

► *Ejemplo 11 (D)*

Estudiar la posición relativa de los planos a y b



► *Ejemplo 12 (A)*

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es paralelo al plano $3x - 5y + z - 5 = 0$.

Solución: La ecuación de todos los planos paralelos al dado son de la forma

$$3x - 5y + z + K = 0$$

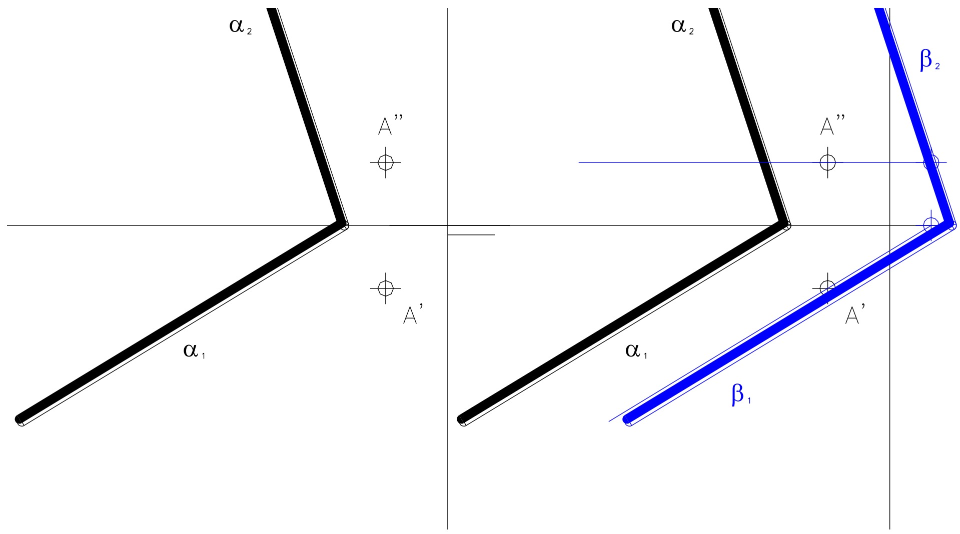
Por pertenecer el punto $A(1,1,1)$ al plano resulta: $3-5+1+K=0 \longrightarrow K=1$

Por tanto, la ecuación del plano pedido es

$3x-5y+z+1=0$

► ***Ejemplo 12 (D)***

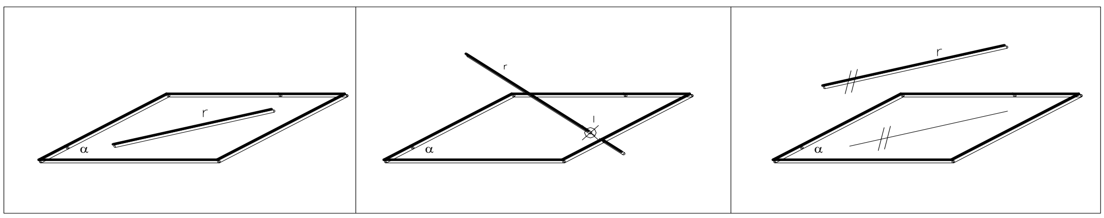
Trazar el plano que contiene al punto A y es paralelo al plano α



2.3.D – Entre recta y plano

Una recta y un plano pueden adoptar estas tres posiciones:

a) Estar contenida en el plano (todos los puntos de la recta pertenecen al plano)
b) Cortarse en un punto
c) Ser paralelos (no tienen ningún punto en común)



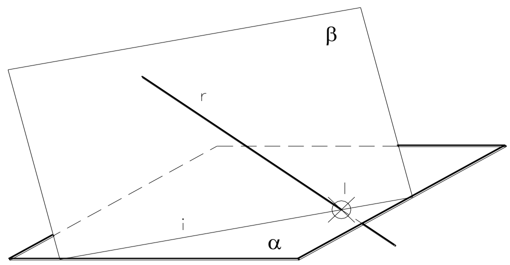
a) b) c)

a) Como se ha visto anteriormente para que una recta pertenezca a un plano las trazas de la misma tienen que estar en las trazas homónimas del plano.

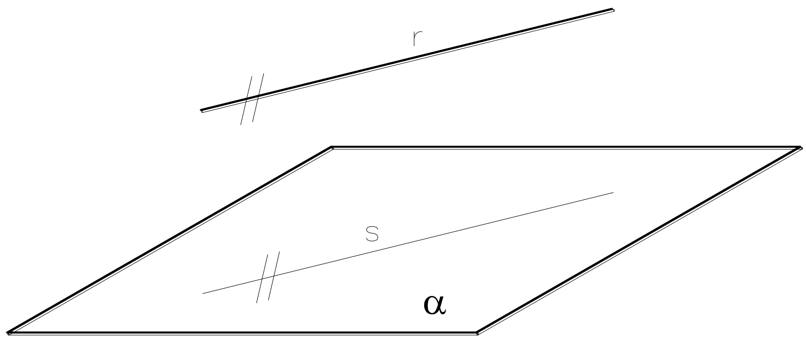
b) Intersección de recta y plano: para determinar la intersección de una recta r y un plano α se utiliza un plano auxiliar normalmente proyectante (β) que contenga a la

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

recta. Se halla la intersección (i) de los planos α y β. La solución (I) es la intersección de las recta i y r (coplanarias)



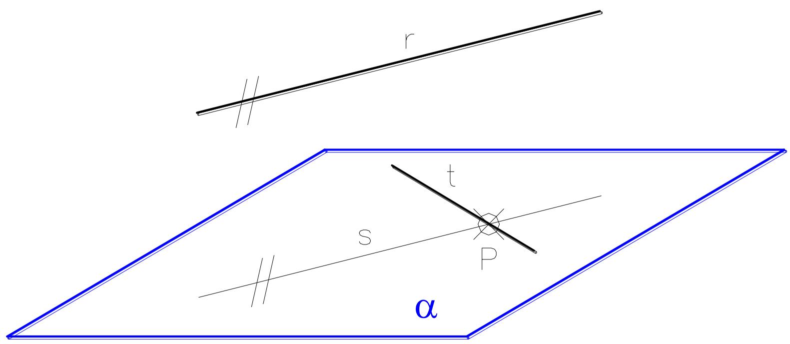
c) Una recta r es paralela a un plano a si lo es a una recta s del mismo



- ***Ejercicio***

Dadas las rectas r y t, definir el plano que contiene a t y es paralelo a r.
El procedimiento a seguir es el siguiente:

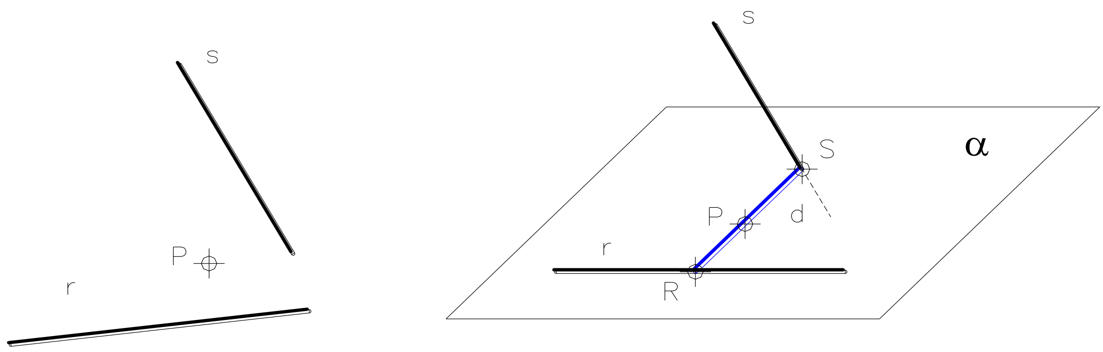
1. Se hace pasar por un punto (P) cualquiera de t, una recta (s) paralela a r.
2. Determinar el plano formado por las rectas s y t (solución)



- ***Ejercicio***

Dadas las rectas r y t trazar por un punto P la recta que las corta.
El procedimiento a seguir es el siguiente:

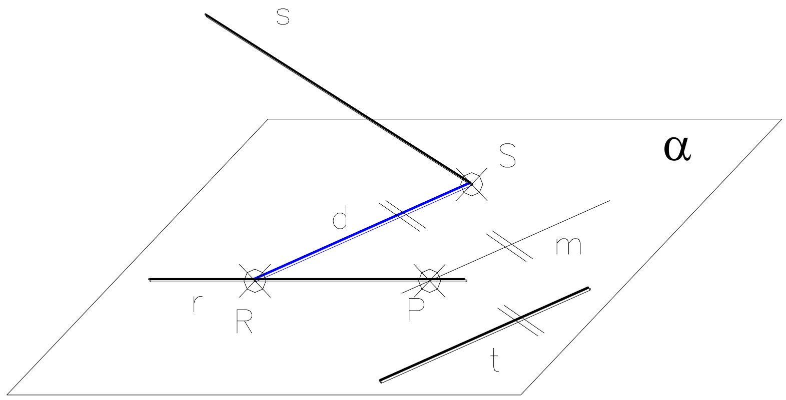
1. Determinar el plano que forma una de las rectas (r) y el punto (P): α
2. Hallar la intersección del plano y la recta s (S)
3. S y P definen la recta solución porque ambos puntos están en el plano al igual que la recta r. Por ser coplanarias ambas rectas o se cortan o son paralelas. En este caso se cortan en el punto R.



- ***Ejercicio***

Dadas tres rectas r, s y t trazar una recta paralela a t y que corte a r y s. El procedimiento es el siguiente

1. Por un punto cualquiera (P) de la recta r, trazar una recta (m) paralela a la recta t.
2. Las rectas r y m definen un plano (α)
3. Determinar la intersección del plano α y la recta s: punto S.
4. Por el punto S, trazar una recta (d) paralela a la recta t.
5. Determinar la intersección entre la recta d y la recta r: punto R.
6. La recta d es la solución, y R y S son los puntos en los que corta a las rectas r y s, respectivamente.



2.3.A – Entre recta y plano

2.3.A.1.- Determinación de las posiciones relativas entre recta y plano cuando la recta y el plano están definidos por sus ecuaciones implícitas

Sean la recta $r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: A_3+B_3y+C_3z+D_3=0$

Para estudiar sus posiciones relativas se estudia la variedad lineal afín $r\cap\pi$ definida por:

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

$$r \cap \pi : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ A_3 + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \end{cases}$$

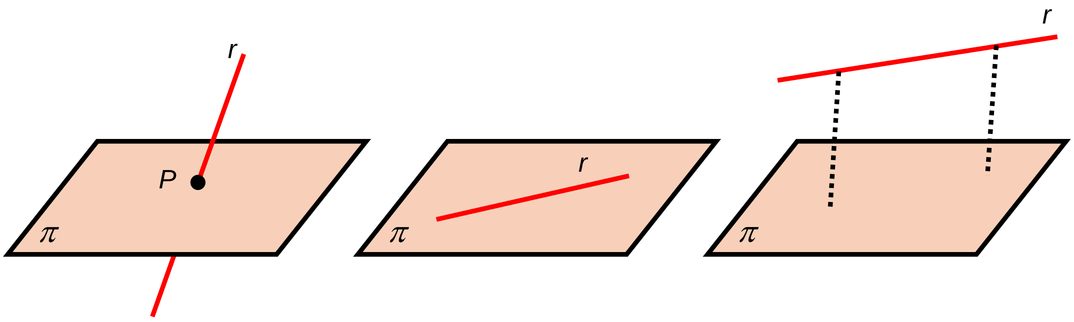
donde $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$

El sistema lineal de ecuaciones lineales $r \cap \pi$ puede ser:

<u>Caso 1: </u>Compatible Determinado ($rg(M) = rg(M') = 3 = n^o\ incógnitas$)
El sistema tiene una única solución, por lo que la intersección de la recta y el plano es un punto que se obtiene resolviendo el sistema. Se expresa diciendo que la recta r y el plano π "se cortan" o son "secantes".

<u>Caso 2: </u>Compatible Indeterminado ($rg(M) = rg(M') = 2 < 3 = n^o\ incógnitas$)
El sistema tiene infinitas soluciones debido a que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras. En este caso el plano π pertenece al haz de planos de eje r, luego $r \subset \pi$. Se expresa diciendo que la recta r y el plano π son "incidentes" o que la recta está "contenida" en el plano.

<u>Caso 3: </u>Incompatible ($rg(M) = 2 \neq rg(M') = 3$)
El sistema no tiene solución. Entonces $r \cap \pi = \{0\}$, es decir la recta r y el plano π son "paralelos".



Plano y recta secantes *Plano y recta incidentes* *Plano y recta paralelos*

<u>2.3.A.2.- Determinación de las posiciones relativas entre recta y plano cuando la recta y el plano están definidos por sus ecuaciones vectoriales o paramétricas</u>

Sea la recta r definida por sus ecuaciones paramétricas $r: \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donde $P = (p_1, p_2, p_3)$ es un punto cualquiera de la recta y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ su vector director y

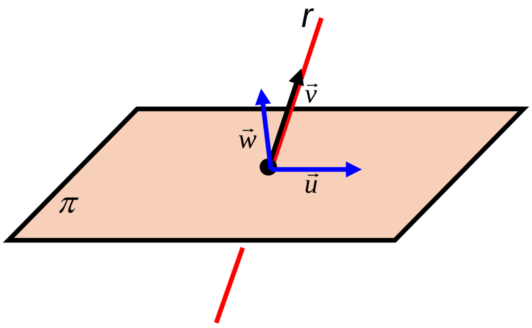
Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

sea el plano π definido por sus ecuaciones paramétricas $\pi:\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

donde $Q=(q_1,q_2,q_3)$ es un punto cualquiera del plano y $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ sus vectores directores. Se puede estudiar la posición relativa entre la recta r y el plano π en función de sus vectores directores de la siguiente manera:

a. Recta y plano secantes

Si el vector director de la recta y los vectores directores del plano son linealmente independientes, la recta y el plano son secantes. En este caso se cumple que $rg\begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix}=3$



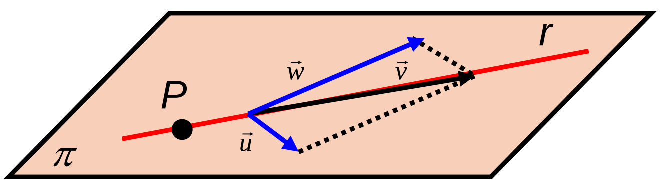
b. Recta contenida en el plano y recta paralela al plano

Si el vector director de la recta es combinación lineal de los vectores directores del plano, la recta está contenida en el plano o es paralela a él.

En ambos casos se cumple que $rg\begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix}=2$

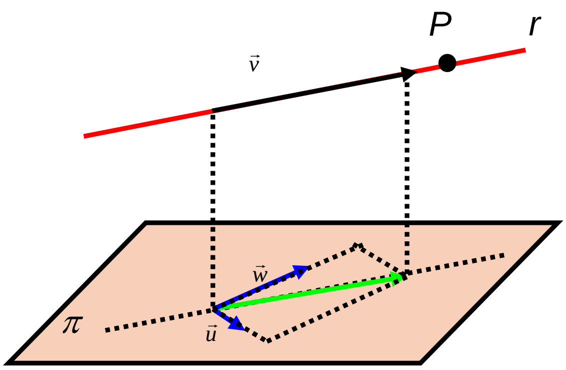
Para distinguir los dos casos, se toma un punto cualquiera de la recta y se sustituyen sus coordenadas en la ecuación del plano de forma que si se satisface, la recta está contenida en el plano y si no se satisface, la recta es paralela al plano.

Plano y recta incidentes



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Plano y recta paralelos



► ***Ejemplo 13 (A)***

Estudiar las posiciones relativas del plano $\alpha : x + ay - z = 1$ y la recta $r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores del parámetro real a.

Solución: Formamos el sistema $r \cap \alpha : \begin{cases} x + ay - z - 1 = 0 \\ 2x + y - az - 2 = 0 \\ x - y - z - a + 1 = 0 \end{cases}$

donde $M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(M) \geq 2$; $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a + 2$

$-a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$ $\Rightarrow rg(M) = 3 = rg(M') \Rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto
- Si $a = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(M) = 2 = rg(M') \Rightarrow$ la recta está contenida en el plano
- Si $a = -1$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2 \neq rg(M') = 3 \Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos

2.3. Ejemplos comunes a ambas materias

► *Ejemplo 14 (A)*

Indicar la posición relativa entre la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ y el plano $\alpha: 2x - 3y + z + 1 = 0$

Solución: obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$r: \begin{cases} x = y \\ x = z + 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

La intersección entre la recta y el plano es $r \cap \alpha: \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$

donde $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Estudiamos el rango de las matrices M y M'

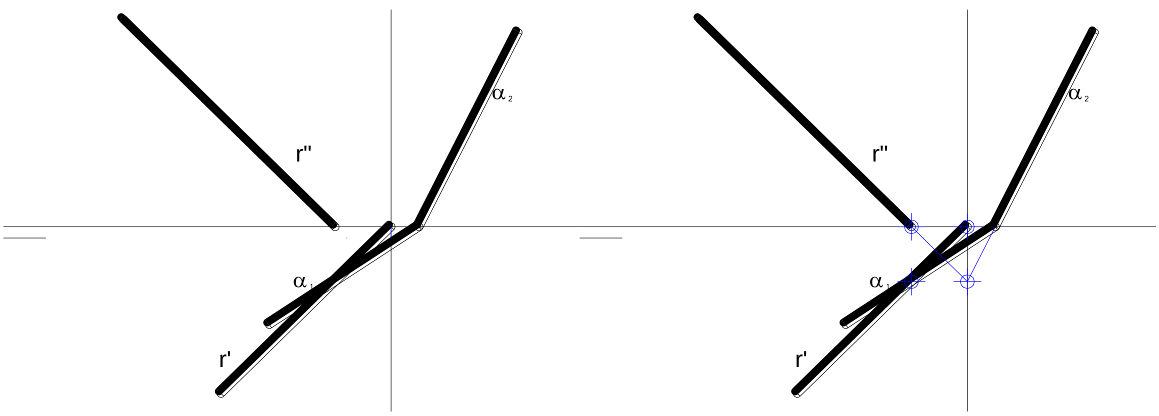
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(M) \geq 2 \;\; ; \;\; \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(M) = 2 = rg(M')$$

Por lo tanto, la recta está contenida en el plano

► *Ejemplo 14 (D)*

Comprobar la posición de la recta r y el plano α

Solución: Como se observa las trazas de la recta se encuentran en las trazas homónimas del plano. Por lo tanto la recta pertenece al plano



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

► ***Ejemplo 15 (A)***

Determinar el valor del parámetro real b para que la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{b} = \frac{z+3}{2}$ no corte al plano $\alpha: 2x - 4y + 5z = 6$

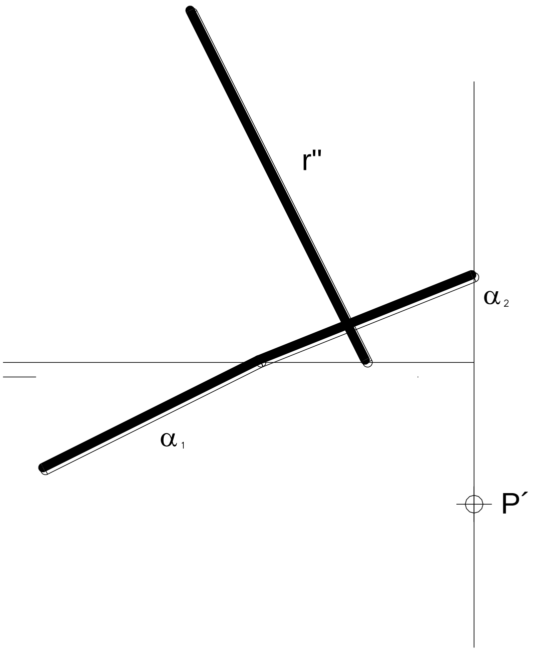
Solución: Para que una recta y un plano no se corten deben ser paralelos, por lo que el vector director de la recta y el vector asociado o normal al plano deben ser perpendiculares (su producto escalar debe valer cero).

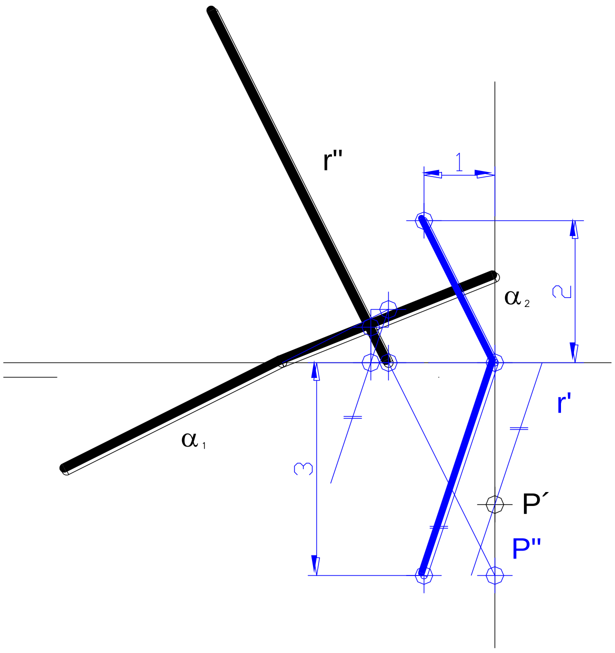
El vector director de la recta es $\vec{u} = (1, b, 2)$ y el vector normal al plano $\vec{a} = (2, -4, 5)$

$\vec{u} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow (1, b, 2) \cdot (2, -4, 5) = 0 \Rightarrow 2 - 4b + 10 = 0 \Rightarrow b = 3$

► ***Ejemplo 15 (D)***

Hallar r' y P" para que r sea paralela a el plano α. Determinar el parámetro que falta (coordenada "y" del vector director de la recta).





► ***Ejemplo 16 (A)***

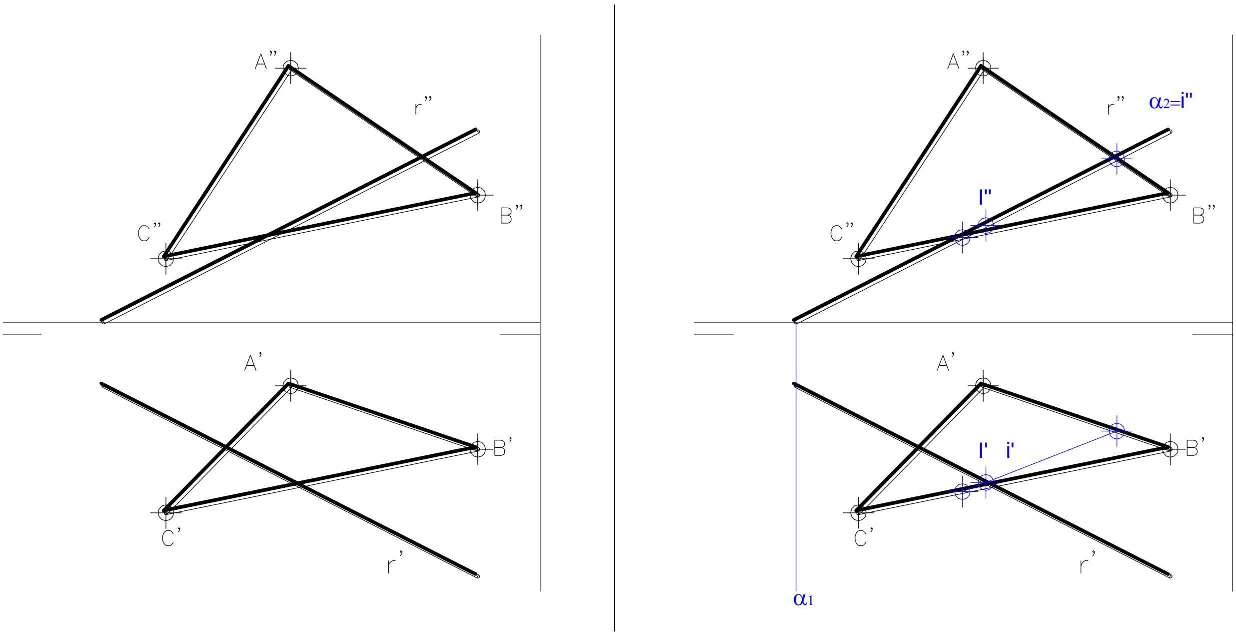
Determinar la intersección de la recta $r: \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$ y el plano $\alpha: x - 13y - 8z + 41 = 0$

Solución: Calculamos la intersección de la recta y el plano resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$r \cap \alpha : \begin{cases} x + 2y = 9 \\ x + 2z = 7 \\ x - 13y - 8z = -41 \end{cases} \rightarrow x = \frac{91}{23}\ ,\ y = \frac{58}{23}\ ,\ z = \frac{35}{23}$$

► *Ejemplo 16 (D)*

Determinar la intersección de la recta r y el plano ABC



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe