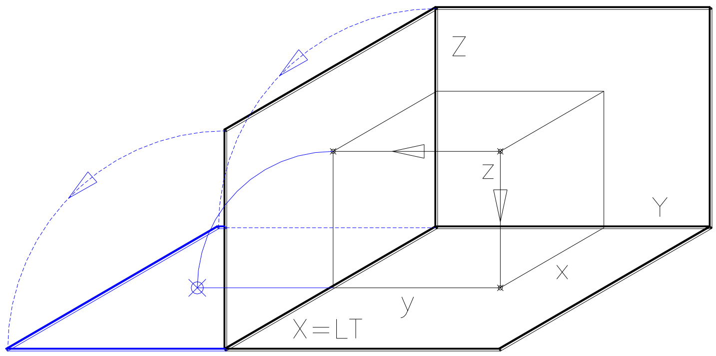
TEMA I: DEFINICIÓN Y REPRESENTACIÓN DE ELEMENTOS DEL ESPACIO AFIN

1.1.D - Sistema de referencia

En el Sistema Diédrico se utilizan tres planos ortogonales (XY, XZ y ZY), denominados PH, PV y PP) sobre los que se proyectan ortogonalmente los elementos a representar. En general las proyecciones que más se utilizan son las del PH y el PV dejando las de PP para casos concretos.

Se denomina línea de tierra (LT) a la intersección de los planos de proyección PH y PV Uno de los planos se gira alrededor de la LT hasta hacerlo coincidir con el otro plano. De esta forma se trabaja sobre un único plano.

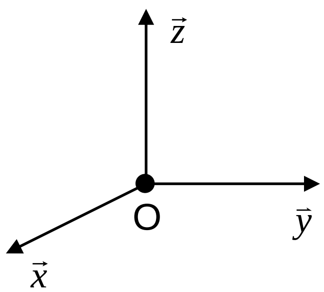


1.1.A - Sistema de referencia

Sea un punto fijo O del espacio y una base $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ de R^3, el conjunto formado por O y por $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ constituye un sistema de referencia en el espacio ya que permite determinar la posición de cualquier punto del espacio y se expresa por $R = \{O\ ;\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$.

Al punto O se le llama origen. Las rectas paralelas a los vectores de la base que pasan por O se llaman ejes de coordenadas que expresamos por OX, OY y OZ.

Vamos a considerar que la base a utilizar es una base ortonormal, por lo que $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ son vectores unitarios perpendiculares entre sí.

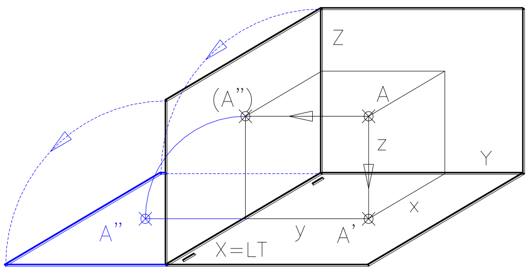


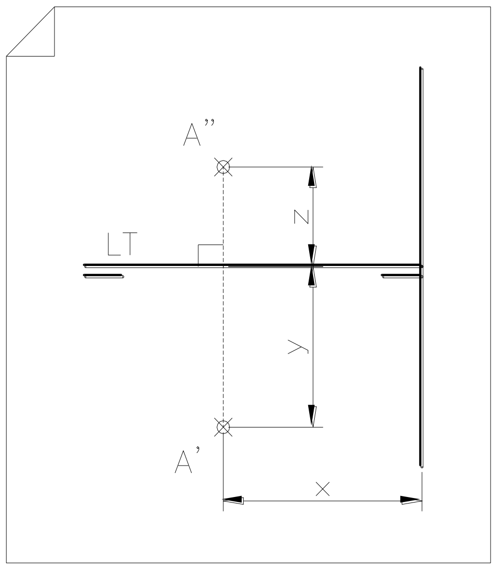
Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

1.2.D - Punto

Un punto (A) queda definido por dos proyecciones (A’ sobre PH, y A” sobre PV). La línea que une ambas proyecciones es, por definición, perpendicular a la LT. Las tres coordenadas cartesianas del punto son:

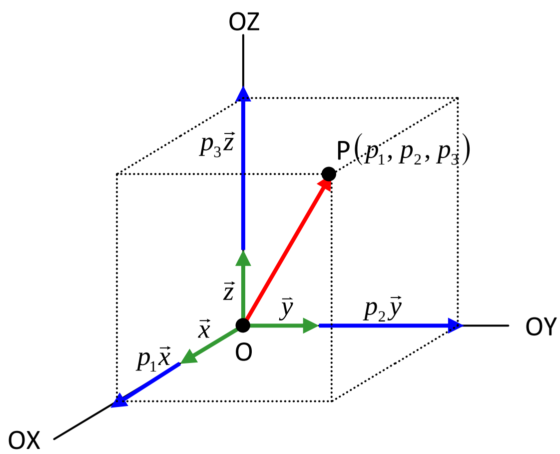
- x = distancia al plano de referencia YZ (denominado Plano de Perfil) que se proyecta como una línea perpendicular a la LT en el espacio de trabajo (planos XY+XZ)
- y = distancia de A’ a la LT
- z = distancia de A” a la LT





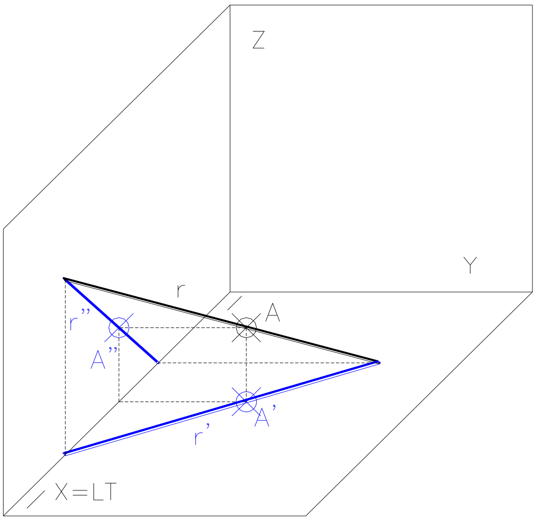
1.2.A - Coordenadas de un punto

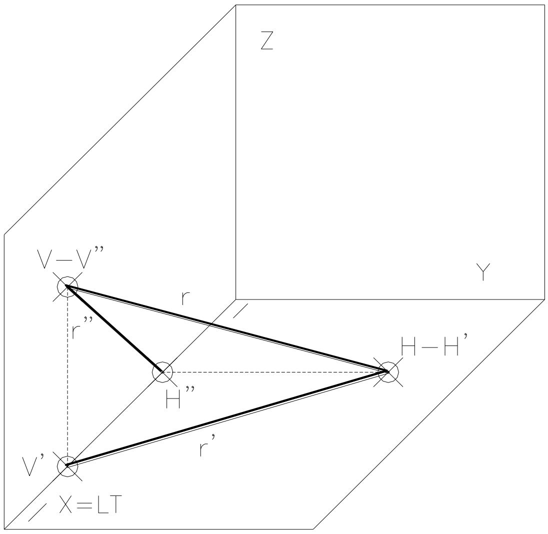
Un punto cualquiera P del espacio determina con el punto O un vector $\overrightarrow{OP}$ de componentes (p_1, p_2, p_3) en la base B, es decir, $\overrightarrow{OP} = p_1\vec{x} + p_2\vec{y} + p_3\vec{z}$, por ello se dice que el punto P tiene por coordenadas cartesianas en el sistema de referencia $R = \{O\ ;\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ a (p_1, p_2, p_3).



1.3.D - Recta

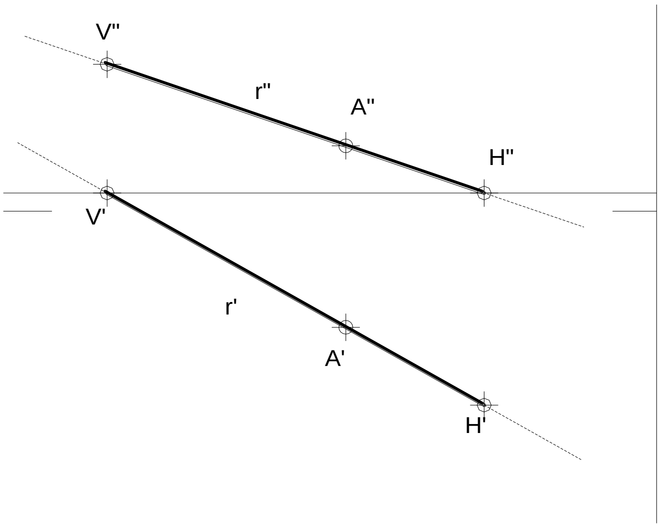
Una recta (r) queda definida por sus dos proyecciones (r' sobre PH, y r" sobre PV). Si un punto A pertenece a una recta r, sus proyecciones A' y A" pertenecerán a r' y r", respectivamente. Las proyecciones de dos puntos pertenecientes a la recta definen las proyecciones de la recta.





Se denomina trazas de una recta a los puntos donde esta corta a los planos de proyección:

- Traza horizontal (H): punto donde r corta a plano XY (punto con z = 0)
- Traza vertical (V): punto donde r corta a plano XZ (punto con y = 0)

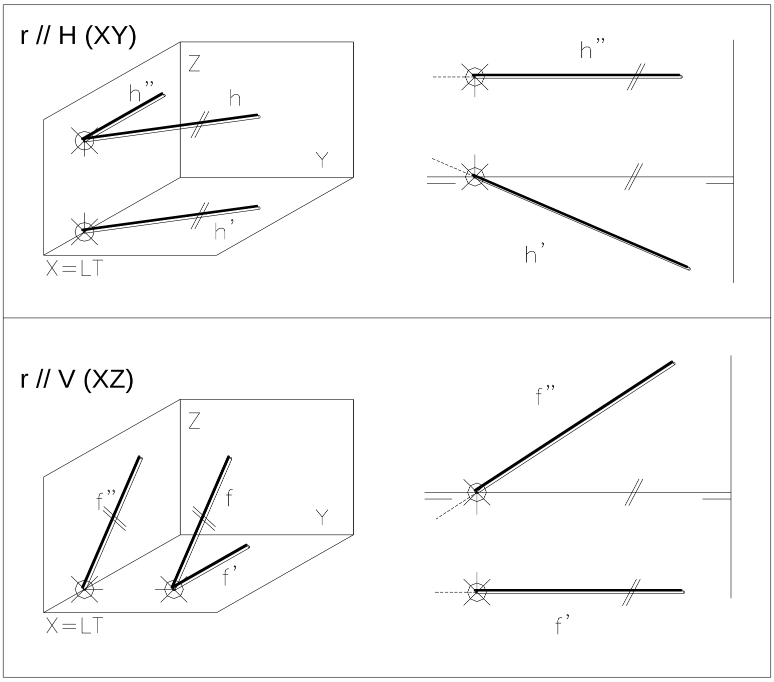


Las rectas paralelas a los planos XY y XZ, solo tienen una traza, ya que una de sus proyecciones será paralela a la línea de tierra.

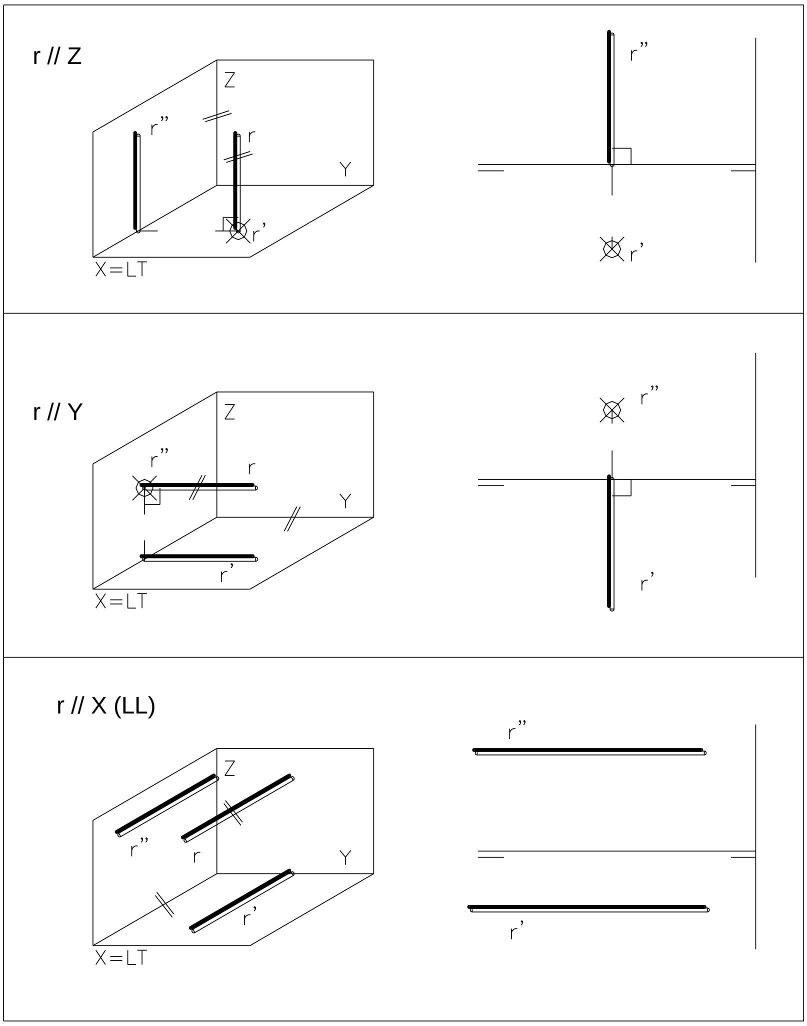
La siguiente figura muestra dos rectas de este tipo:

- Recta paralela a XY (recta horizontal): h
- Recta paralela a XZ (recta frontal): f

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe



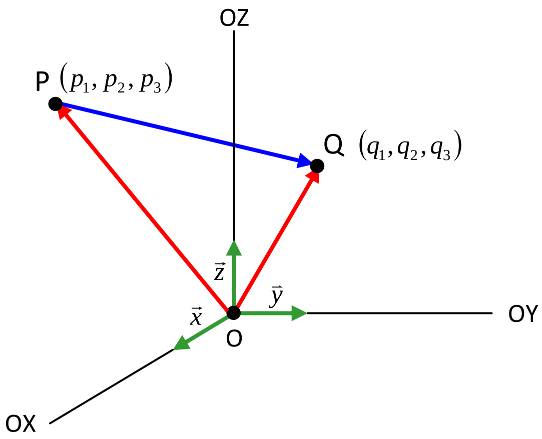
Las rectas paralelas a los ejes coordenados se muestran en la siguiente figura.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

1.3.A - Coordenadas de un vector determinado por dos puntos

Sean dos puntos del espacio de coordenadas $P=(p_1,p_2,p_3)$ y $Q=(q_1,q_2,q_3)$, según la siguiente figura:



Entonces se cumple que $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$, por tanto

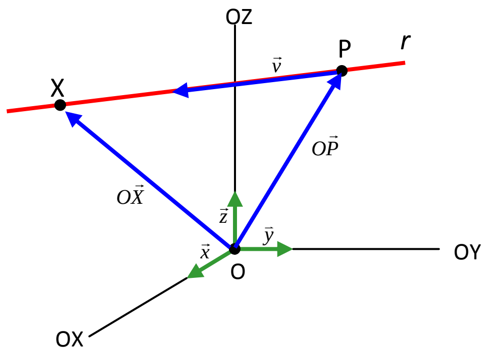
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(q_1,q_2,q_3)-(p_1,p_2,p_3)=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$$

1.3.A - Recta

Una recta se define mediante un punto de la misma y una dirección. Cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta se denomina vector director de la recta.

En el sistema de referencia $R=\{O\ ;\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$, las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $P=(p_1,p_2,p_3)$ y que tiene por vector director al vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son:

- Ecuación vectorial de la recta



Como se observa en la figura, dado un punto cualquiera X de la recta r, los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, por lo que $\overrightarrow{PX}=\lambda\vec{v}$ donde $\lambda\in\mathbb{R}$. Además $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}$.

Si se toma $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ y $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ se tiene que $\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{v}$, lo que se conoce como ecuación vectorial de la recta.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

- <u>Ecuaciones paramétricas de la recta</u>

  Si en la ecuación vectorial de la recta se sustituyen los vectores por sus coordenadas, se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}$$

- <u>Ecuaciones en forma continua de la recta</u>

  Si en las ecuaciones paramétricas se despeja el parámetro λ se obtiene que:

$$\lambda = \frac{x - p_1}{v_1} \;;\; \lambda = \frac{y - p_2}{v_2} \;;\; \lambda = \frac{z - p_3}{v_3}$$

  Al igualar estas expresiones se obtienen las ecuaciones en forma continua de la recta:

$$r : \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}$$

  Esta expresión tiene sentido simbólico cuando alguno de los denominadores vale 0, ya que los denominadores son las coordenadas del vector director de la recta.

- <u>Ecuaciones en forma implícita de la recta</u>

  A partir de las ecuaciones continuas se toman dos igualdades cualesquiera:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} \Rightarrow v_2(x - p_1) = v_1(y - p_2)$$

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{z - p_3}{v_3} \Rightarrow v_3(x - p_1) = v_1(z - p_3)$$

  formando el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} v_2 x - v_1 y + (p_2 v_1 - p_1 v_2) = 0 \\ v_3 x - v_1 z + (p_3 v_1 - p_1 v_3) = 0 \end{cases}$$

  Expresándolo en forma general, se obtienen las ecuaciones implícitas:

$$r : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Como caso particular, se identifican las ecuaciones de algunas rectas paralelas a los planos y a los ejes coordenados:

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Ecuaciones de las rectas paralelas a los planos coordenados

Recta paralela al plano XOY ⇒ $r: \begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ z = cte \end{cases}$

Recta paralela al plano XOZ ⇒ $r: \begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ y = cte \end{cases}$

Recta paralela al plano YOZ ⇒ $r: \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = cte \end{cases}$

Ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes coordenados

Recta paralela al eje OX ⇒ $r: \begin{cases} y = cte \\ z = cte \end{cases}$

Recta paralela al eje OY ⇒ $r: \begin{cases} x = cte \\ z = cte \end{cases}$

Recta paralela al eje OZ ⇒ $r: \begin{cases} x = cte \\ y = cte \end{cases}$

► ***Ejemplo 1 (A)***

Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A = (5,4,2)$ y $B = (1,6,4)$.

Solución: El vector director de la recta será $\vec{v} = B - A = (-4,2,2)$, por lo que

- Ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 5 - 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

- Ecuaciones en forma continua

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{2}$$

- Ecuaciones implícitas

Tomando dos de las igualdades de las ecuaciones en forma continua, por ejemplo:

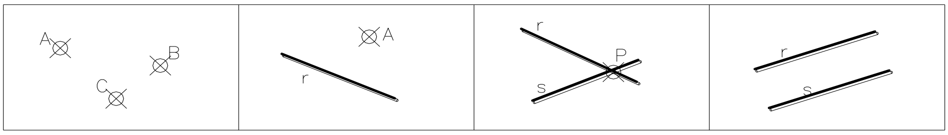
$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{2} \rightarrow x + 2y - 13 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{2} \rightarrow y - z - 2 = 0$$

Por tanto las ecuaciones implícitas son $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

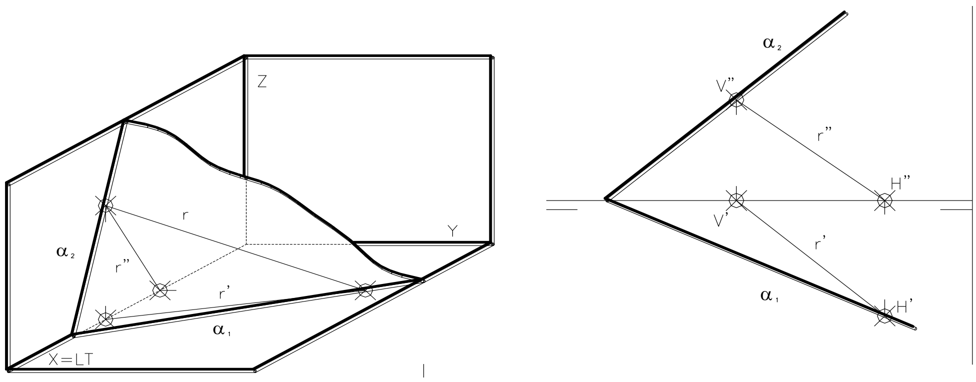
1.4.D - Plano

Un plano queda definido por:
a) tres puntos no alineados
b) una recta y un punto exterior a ella
c) dos rectas que se cortan
d) dos rectas paralelas



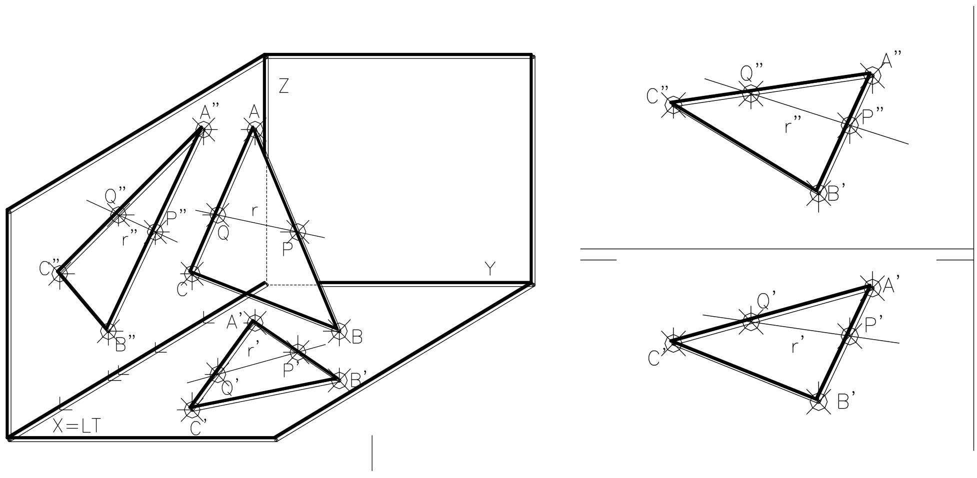
En el Sistema Diédrico los planos se representan de dos formas:

a. Por sus trazas horizontal y vertical (α_1, α_2), rectas de intersección con los planos de proyección (XY y XZ)



Las trazas de una recta pertenecen a las trazas del plano donde está contenida.

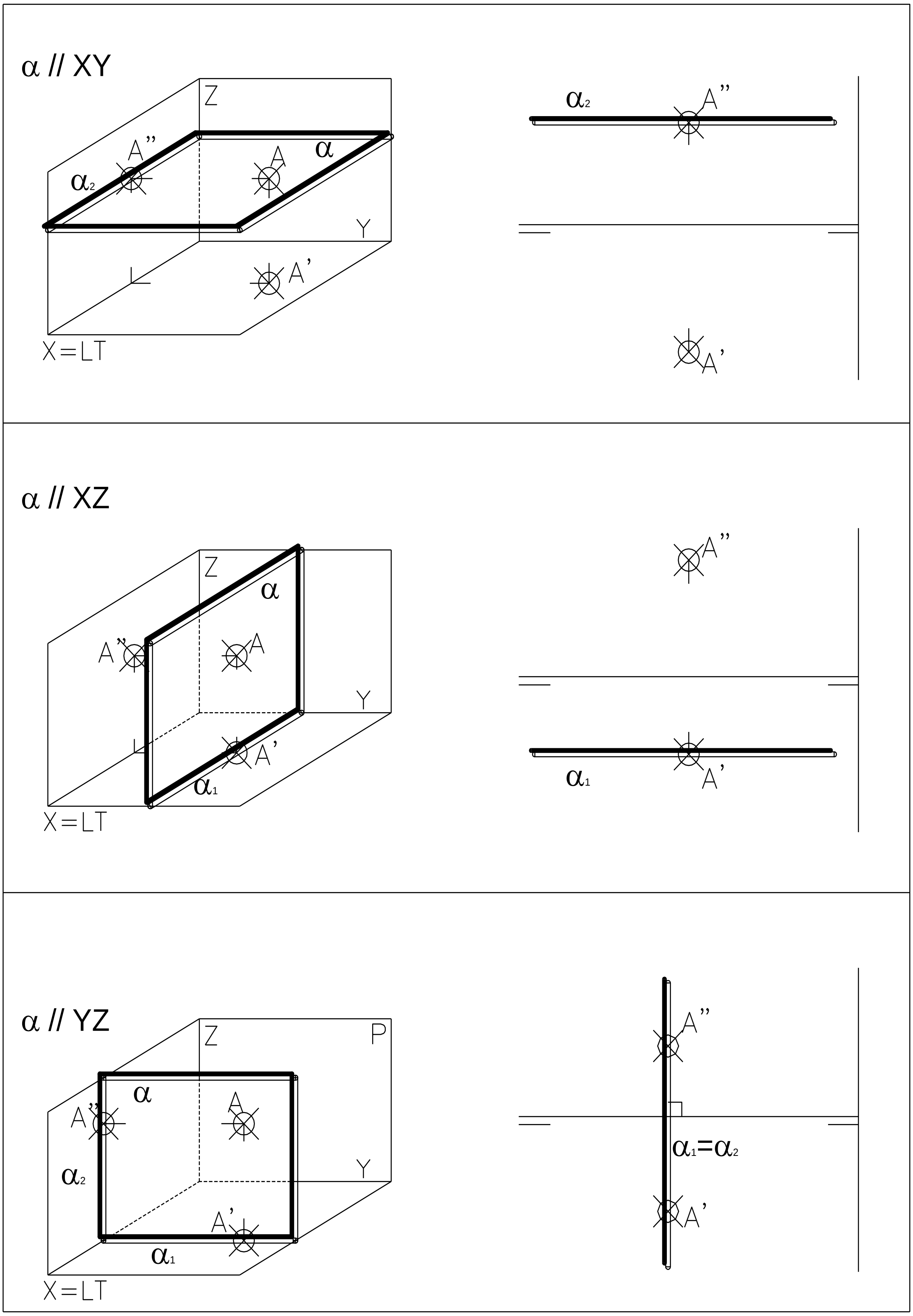
b. Por tres puntos (o dos rectas que se cortan):



Una recta perteneciente a un plano corta, al menos, a dos rectas de ese plano.

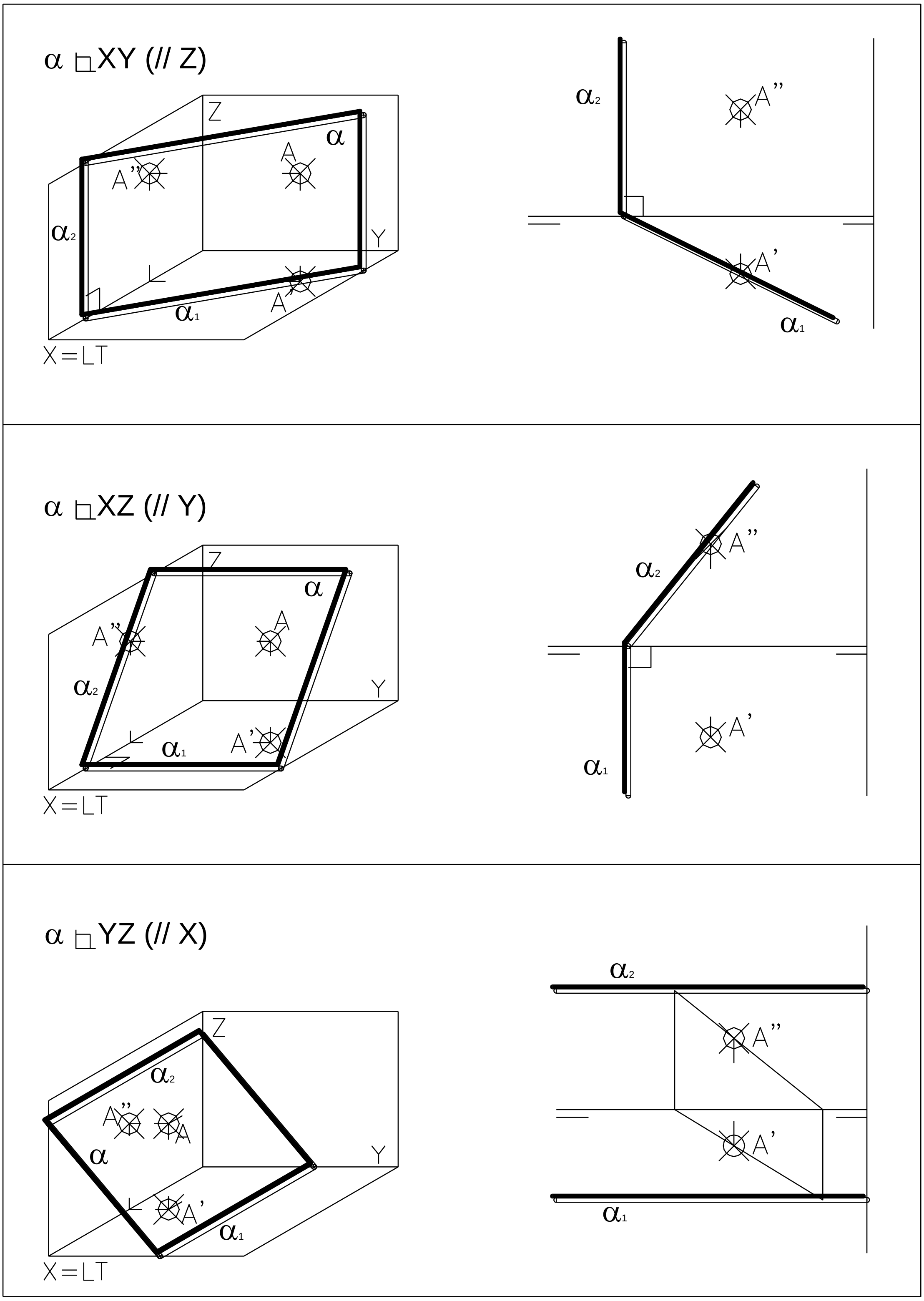
Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Los planos paralelos a los planos de proyección tienen como característica que una de las coordenadas de todos sus puntos es constante: si es paralelo al PH la cota es constante, si es paralelo a PV el alejamiento es constante y si lo es al plano PP la distancia al plano de perfil es constante.

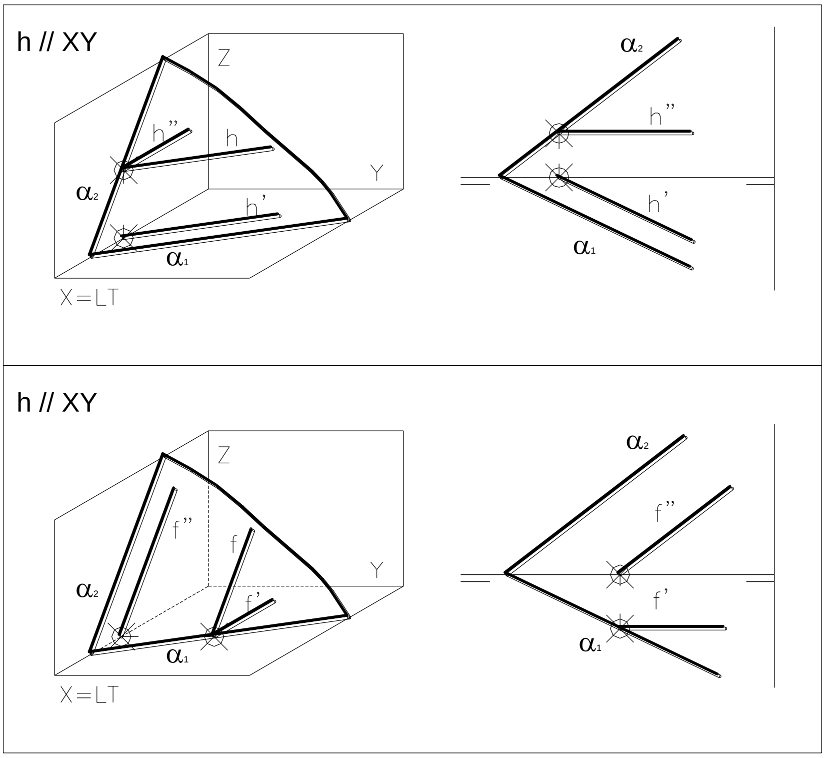


Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Si un plano es paralelo a un eje coordenado es perpendicular (proyectante) a un plano coordenado. Si es el eje Z será proyectante horizontal, si es el eje Y será proyectante vertical y si es el eje X proyectante al perfil. En la siguiente figura se muestran los tres casos posibles.



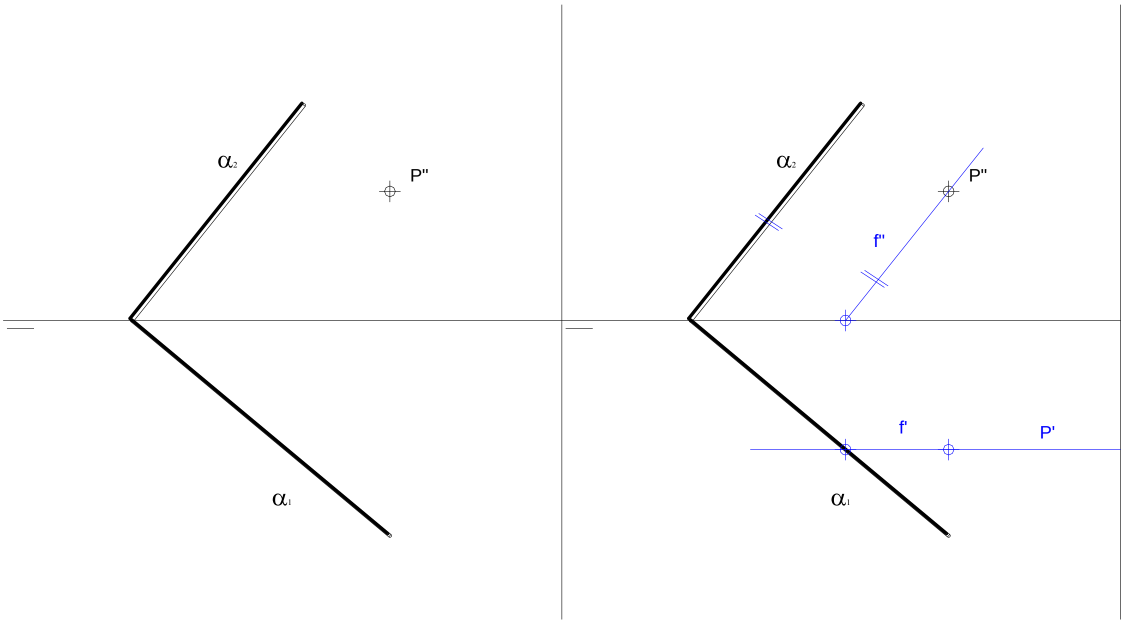
Dentro de las infinitas rectas contenidas en un plano existen algunas que son importantes para definir el plano en el sistema diédrico: las frontales (paralelas a PV) y las horizontales (paralelas a PH). Estas rectas tienen una de sus proyecciones paralelas a una de las trazas del plano (la horizontal h’ // a α_{1}, la frontal f” es paralela a α_{2})



► ***Ejemplo 2 (D)***

Trazar por el punto P una recta frontal del plano. Hallar la proyección que falta del punto P.

Solución:



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

1.5.A - Plano

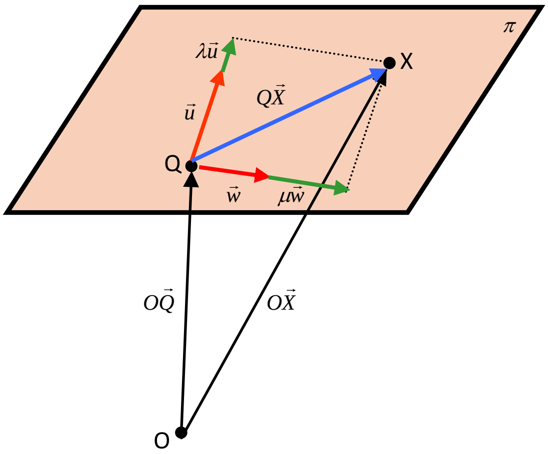
Un plano en el espacio se define mediante un punto del mismo y dos direcciones. Estas direcciones vienen dadas por dos vectores cualesquiera del plano que sean linealmente independientes y que se denominan vectores directores del plano.

Vamos a expresar en el sistema de referencia $R = \{O\ ;\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, el plano π que pasa por el punto $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y que tiene por vectores directores a los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ de diferentes formas:

- <u>Ecuación vectorial del plano</u>

  Como se observa en la figura, dado un punto cualquiera X del plano π, el vector $\overrightarrow{QX}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$, por lo que $\overrightarrow{QX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}$ donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Además $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QX}$.

  Si se toma $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ y $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ se tiene que $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{x} + \mu\vec{w}$, lo que se conoce como ecuación vectorial de la recta.



- <u>Ecuaciones paramétricas del plano</u>

  Si en la ecuación vectorial del plano se sustituyen los vectores por sus coordenadas, se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

- <u>Ecuación implícita del plano</u>

  Se consideran las ecuaciones paramétricas como un sistema de ecuaciones con dos incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} x - q_1 = u_1\lambda + w_1\mu \\ y - q_2 = u_2\lambda + w_2\mu \\ z - q_3 = u_3\lambda + w_3\mu \end{cases}$$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que se cumpla:

$$\begin{vmatrix} x-q_1 & y-q_2 & z-q_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} x-q_1 & u_1 & w_1 \\ y-q_2 & u_2 & w_2 \\ z-q_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar cualquiera de los determinantes anteriores, se obtiene la ecuación implícita del plano que se puede expresar como:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

- Ecuación de un plano que contiene a un punto

La ecuación de un plano del que se conoce su vector asociado o normal (vector que es perpendicular al plano), $\vec{n} = (A, B, C)$, y un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ perteneciente a él, viene dada por:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Como caso particular, se identifican las ecuaciones de algunos planos respecto a los ejes y planos de referencia:

Ecuaciones de los planos paralelos a los planos coordenados

Plano paralelo al plano XOY ⇒ $z = cte$

Plano paralelo al plano XOZ ⇒ $y = cte$

Plano paralelo al plano YOZ ⇒ $x = cte$

Ecuaciones de los planos paralelos a los ejes coordenados

Plano paralelo al eje OX ⇒ $By + Cz + D = 0$

Plano paralelo al eje OY ⇒ $Ax + Cz + D = 0$

Plano paralelo al eje OZ ⇒ $Ax + By + D = 0$

► ***Ejemplo 3 (A)***

Determinar la ecuación del plano que contiene los puntos $A = (5,4,2), B = (1,6,4)$ y $C = (4,2,5)$.

Solución: Los vectores directores del plano son

$\vec{u} = B - A = (-4,2,2)$ y $\vec{w} = C - B = (3,-4,1)$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

- <u>Ecuación vectorial</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- <u>Ecuaciones paramétricas</u>

$$\begin{cases} x = 5 - 4\lambda + 3\mu \\ y = 4 + 2\lambda - 4\mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

- <u>Ecuación implícita</u>

Se obtienen resolviendo la igualdad $\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto la ecuación implícita es $x + y + z - 11 = 0$

- <u>Ecuación en forma normal</u>

El vector normal al plano se obtiene haciendo el producto vectorial de los dos vectores directores del plano $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$, por lo que el vector asociado será $\vec{n} = (10,10,10)$ o lo que es lo mismo $\vec{n} = (1,1,1)$ ya que ambos tiene la misma dirección.

Como se conoce el punto del plano, por ejemplo $A = (5,4,2)$, la ecuación del plano es:

$1 \times (x - 5) + 1(y - 4) + 1(z - 2) \Rightarrow x + y + z - 11 = 0$

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe