Planteamiento

La barra CDE gira con una velocidad angular $\vec{\omega}_{CD} = 10\,\vec{k}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y acelera con $\vec{\alpha}_{CD} = 20\,\vec{k}\,\frac{\text{rad}}{s^2}$, si la deslizadera desciende verticalmente a una velocidad constante de 0,72m/s. Se pide:

a) velocidades y aceleraciones de las deslizaderas A y B considerando el movimiento relativo de la barra AB respecto de la escuadra BDE
b) velocidad y aceleración angular absolutas de la barra AB
c) comprobar los valores obtenidos para la velocidad y aceleración de la deslizadera B considerando el movimiento absoluto de la barra AB

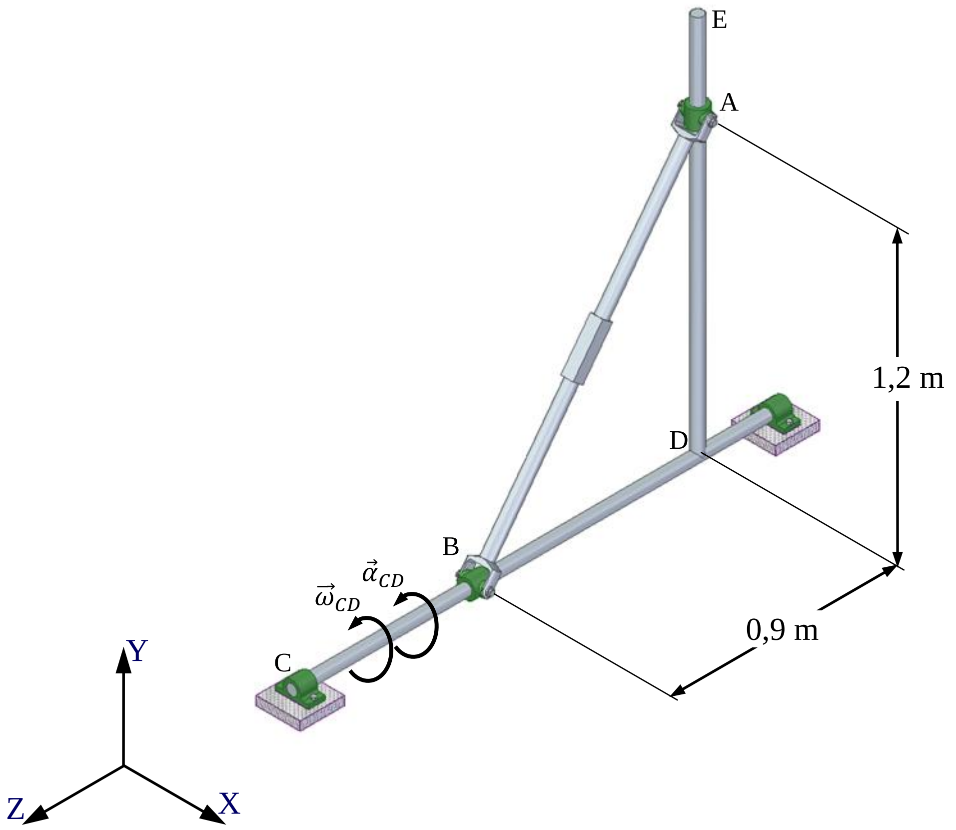

Figura 1

Resolución

Este mecanismo está formado por la escuadra CDE que posee un movimiento de rotación pura alrededor del eje CD, y que se considerará el sistema móvil, y por la barra AB que se mueve dentro de ese sistema móvil.

Los dos elementos están unidos con apoyos móviles, de manera que no tienen ningún punto común, esto hace imprescindible que se considere de alguna manera el movimiento relativo existente entre los dos elementos o entre los puntos y los elementos.

En el enunciado se proponen dos formas posibles de solución.

a) Considerando la combinación de dos movimientos, el relativo y el de arrastre

Se pide la velocidad y la aceleración de la barra AB, la cual se puede separar en dos movimientos:

Movimiento de arrastre, ver *video2-arrastre*, es el movimiento que la barra AB tiene por el hecho de estar contenida en otro elemento, escuadra CDE, que a su vez se mueve. Se calcula considerando la barra AB unida rígidamente, soldada, a la escuadra, es decir, eliminando el movimiento relativo. En esta caso se trata de una rotación pura en torno al eje Z con $\vec{\omega}_{CD} = 10\,\vec{k}\ \mathrm{rad/s}$.

Movimiento relativo, ver *video1- relativo*, es el de la barra AB observado desde la escuadra, se calcula eliminando el movimiento de arrastre. En este caso se trata de un movimiento general, la barra se traslada en la escuadra a la vez que rota en torno a un eje con la dirección del eje X con una velocidad angular $\vec{\omega}_{rel}$.

Para calcular la velocidad absoluta de cualquier punto que pertenezca a la barra AB habrá que sumar las velocidades de arrastre y relativas de dicho punto. En el caso de las aceleraciones además de las aceleraciones de arrastre y relativas del punto hay que sumar también la aceleración de Coriolis.

<u>Cálculo de velocidades</u>

Estudio del movimiento relativo, se plantea el campo de velocidades del movimiento general visto desde la escuadra, es decir, anulando el movimiento de arrastre.

Si los puntos A y B pertenecen a la barra, puede plantearse que $\vec{v}'_B = \vec{v}'_A + \vec{\omega}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB}$, donde $\vec{v}'_B$ es en la dirección del eje Z, $\vec{v}'_A = -0{,}72\,\vec{j}$ es dato y $\vec{\omega}_{rel}$ es en la dirección del eje X.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v'_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{rel} & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix} ; \begin{cases} \vec{i} \to & 0 = 0 \\ \vec{j} \to & 0 = -0{,}72 - 0{,}9\omega_{rel} \to \ \omega_{rel} = -0{,}8\ rad/s \\ \vec{k} \to & v'_B = 0 - 1{,}2\omega_{rel} \qquad v'_B = 0{,}96\ m/s \end{cases}$$

Ahora se plantea la velocidad absoluta para el punto A

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{arrastre}} + \vec{v}'_A$$

donde $\vec{v}_{A_{arrastre}}$ es la velocidad que tiene el punto A si se considera soldado a la escuadra

$$\vec{v}_{A_{arrastre}} = \vec{\omega}_{CD} \wedge \overrightarrow{DA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1{,}2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{arrastre}} + \vec{v}'_A = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{Bmatrix} \to \boxed{\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

Y para el punto B, $\vec{v}_B = \vec{v}_{B_{arrastre}} + \vec{v}_B'$

$\vec{v}_{B_{arrastre}} = 0$, porque B está en el eje de rotación $\vec{v}_B = \vec{v}_{B_{arrastre}} + \vec{v}_B' \rightarrow \vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}96 \end{Bmatrix} [m/s]$

Cálculo de aceleraciones

Se procede de manera similar al cálculo de velocidades.

Para el movimiento relativo, se plantea el campo de aceleraciones del movimiento general, es decir, se anula el giro de la escuadra. Considerando que los puntos A y B pertenecen a la barra, se plantea que $\vec{a}_B' = \vec{a}_A' + \vec{\alpha}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (\vec{\omega}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB})$, donde se sabe que $\vec{a}_B'$ es en la dirección del eje Z, $\vec{a}_A'$ es nula por ser la velocidad constante, $\vec{\alpha}_{rel}$ es en la dirección del eje X y $\vec{\omega}_{rel}$ y $(\vec{\omega}_{rel} \wedge \overrightarrow{AB})$ se han obtenido previamente para el cálculo de velocidades. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_B' \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \alpha_{rel} & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}72 & 0{,}96 \end{vmatrix};$$

$$\begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow & 0 = 0 \\ \vec{\jmath} \rightarrow & 0 = -0{,}9\alpha_{rel} + 0{,}768 & \rightarrow \alpha_{rel} = 0{,}8533\, rad/s^2 \\ \vec{k} \rightarrow & a_B' = 0 - 1{,}2\alpha_{rel} - 0{,}576 & a_B' = -1{,}6\, m/s^2 \end{cases}$$

La aceleración absoluta para el punto A es

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{arrastre}} + \vec{a}_A' + \vec{a}_{A_{Coriolis}}$$

$\vec{a}_{A_{arrastre}}$ sería la velocidad del punto A si estuviese soldada a la escuadra:

$$\vec{a}_{A_{arrastre}} = \vec{\alpha}_{CD} \wedge \overrightarrow{DA} + \vec{\omega}_{CD} \wedge (\vec{\omega}_{CD} \wedge \overrightarrow{DA}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1{,}2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -24 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

La aceleración de Coriolis es $\vec{a}_{A_{Coriolis}} = 2\vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{v}_A' = 2 \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -0{,}72 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 14{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{arrastre}} + \vec{a}_A' + \vec{a}_{A_{Coriolis}} = \begin{Bmatrix} -24 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} + 0 + \begin{Bmatrix} 14{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} -9{,}6 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Y para el punto B, $\vec{a}_B = \vec{a}_{B_{arrastre}} + \vec{a}_B^{'} + \vec{a}_{B_{Coriolis}}$

$\vec{a}_{B_{arrastre}} = 0$; $\vec{a}_B^{'} = -1{,}6\,\vec{k}\ [m/s^2]$

$$\vec{a}_{B_{Coriolis}} = 2\vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{v}_B^{'} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0{,}96 \end{vmatrix} = 0[m/s^2]$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B_{arrastre}} + \vec{a}_B^{'} + \vec{a}_{B_{Coriolis}} \rightarrow \quad \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

b) La barra AB tiene un movimiento relativo respecto a la escuadra CDE. Tal y como puede verse en el apartado 4.3 de la teoría, dado un sistema 1 con $\vec{\omega}_1$ (en el caso que nos ocupa es la escuadra que se mueve con $\vec{\omega}_{CD}$), y un sistema 2 que rota respecto del anterior con $\vec{\omega}_{2/1}$ (en este caso es la barra AB y la velocidad angular $\vec{\omega}_{rel}$), entonces la velocidad angular absoluta $\vec{\omega}_2$, que en este caso, sería la de la barra, se obtiene como la suma de las dos anteriores:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} \qquad (66)$$

Así, la velocidad angular absoluta de la barra AB es:

$$\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{CD} + \vec{\omega}_{rel} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{\omega}_{AB} = \begin{Bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix} [rad/s]$$

En cuanto a las aceleraciones $\vec{\alpha}_2$ es la aceleración angular absoluta de la barra AB, $\vec{\alpha}_1$ la del sistema móvil o escuadra ($\vec{\alpha}_{\mathrm{CD}}$) y $\vec{\alpha}_{2/1}$ la de la barra AB respecto de la escuadra, que se ha calculado en el apartado anterior. Recordando la expresión (74) de la teoría:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

$$\vec{\alpha}_{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}_{\mathrm{CD}} + \vec{\alpha}_{\mathrm{rel}} + \vec{\omega}_{\mathrm{CD}} \wedge \vec{\omega}_{\mathrm{rel}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}8533 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ -0{,}8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{\alpha}_{AB} = \begin{Bmatrix} 0{,}8533 \\ -8 \\ 20 \end{Bmatrix} [rad/s^2]$$

c) Considerando el movimiento absoluto del disco.

Se plantea el campo de velocidades para los puntos A y B

Si los puntos A y B pertenecen a la barra, puede plantearse: $\vec{v}_{\mathrm{B}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$

En este punto debe insistirse en que $\vec{\omega}_{AB}$ es la velocidad angular absoluta de la barra AB, obtenida en el apartado anterior.

La velocidad absoluta de A obtenida como la suma de la velocidad de arrastre y la relativa es la que se ha calculado en primer apartado:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_{arrastre}} + \vec{v}'_A = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Se sustituye en la ecuación $\vec{v}_\mathrm{B} = \vec{v}_\mathrm{A} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$:

$$\vec{v}_\mathrm{B} = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -0{,}8 & 0 & 10 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 0{,}72 \\ 0{,}96 \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}96 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

Y puede comprobarse que el resultado coincide con el obtenido en el apartado anterior.

La expresión para el campo de aceleraciones dados dos puntos A, B del mismo sólido rígido:

$$\vec{a}_\mathrm{B} = \vec{a}_\mathrm{A} + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \left(\vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

donde $\vec{\alpha}_{AB}$ es la aceleración angular absoluta de la barra AB, obtenida en el anterior apartado b):

La aceleración de A se ha obtenido en el apartado a) estudiando el movimiento relativo de una partícula respecto de la escuadra y es $\vec{a}_\mathrm{A} = \begin{Bmatrix} -9{,}6 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$

$$\vec{a}_\mathrm{B} = \begin{Bmatrix} -9{,}6 \\ -120 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}8533 & -8 & 20 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -0{,}8 & 0 & 10 \\ 12 & 0{,}72 & 0{,}96 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{Bmatrix} [m/s^2]}$$

Como se quería comprobar.

Conclusión, resumen

En el primer apartado se calculan las velocidades y aceleraciones de los puntos A y B considerando que pertenecen a la barra AB, que se mueve con movimiento general dentro de otro sólido, escuadra CDE que a su vez está rotando. Para este cálculo se suman las velocidades de arrastre y relativa y las aceleraciones de arrastre, relativa y de Coriolis.

En el apartado b) se calculan la velocidad y aceleración angulares absolutas de la barra, en el *video4-transparente* se perciben mejor estas variables del sólido.

En el apartado c) se calcula la velocidad y aceleración del punto B considerando el movimiento general de la barra como la suma de una traslación con la misma velocidad y aceleración del punto A mas una rotación alrededor de A con velocidad y aceleración angulares absolutas. Para ello se parte de la velocidad y aceleración del punto A que se obtuvieron en el apartado a).

En el cálculo de c) se ha tomado como punto de referencia el punto A pero podría tomarse como punto de referencia el punto B, de hecho en el *video4-transparente* resulta más fácil percibir este movimiento, es decir, la traslación de la barra AB como lo hace el punto B mas la rotación de dicha barra alrededor de B. La velocidad y la aceleración angular son siempre las absolutas.