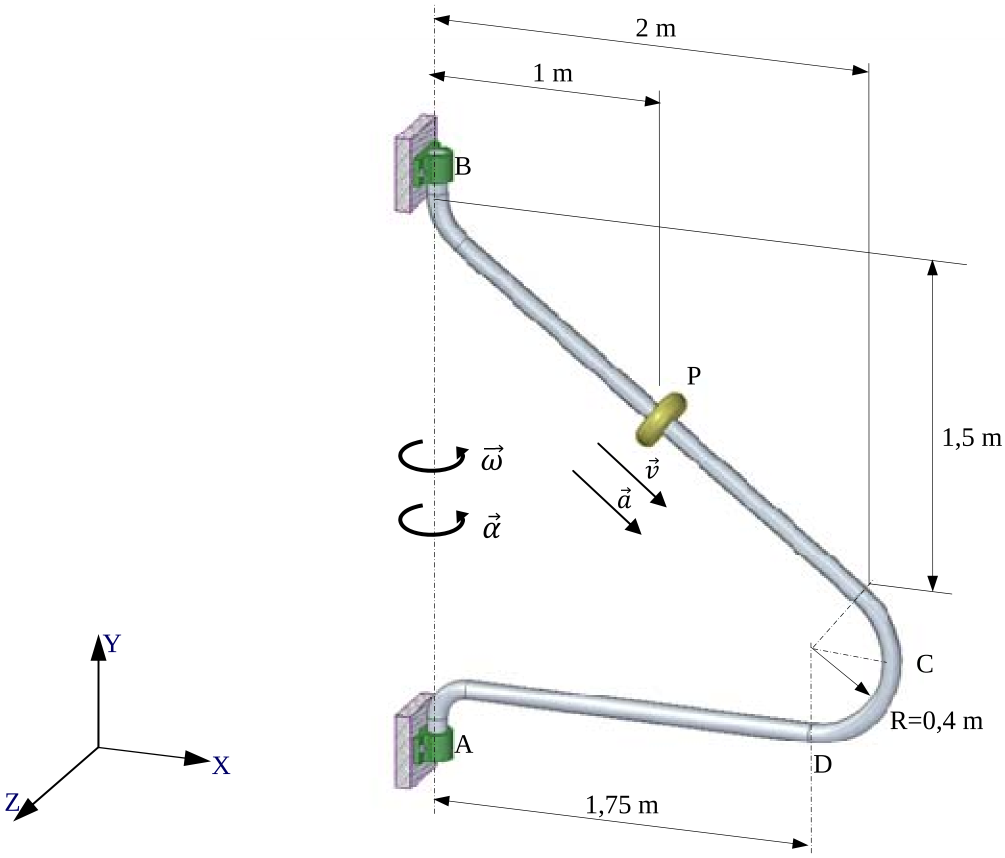
Planteamiento

La barra acodada BCDA rota con una velocidad angular y a su vez un disco P se desplaza hacia el punto D. Se sabe que cuando el disco pasa por la posición representada la barra rota con $\omega = 8 \text{ rad}/s$ y acelera con $\alpha = 4 \text{ m}/s^2$ y el disco P se desplaza con velocidad $v = 0{,}3\text{m/s}$ y aceleración $a = 0{,}1\text{m}/s^2$.

Se pide:

a) Velocidad y aceleración del punto P en la posición inicial.
b) Velocidad y aceleración del punto P en la posición C.



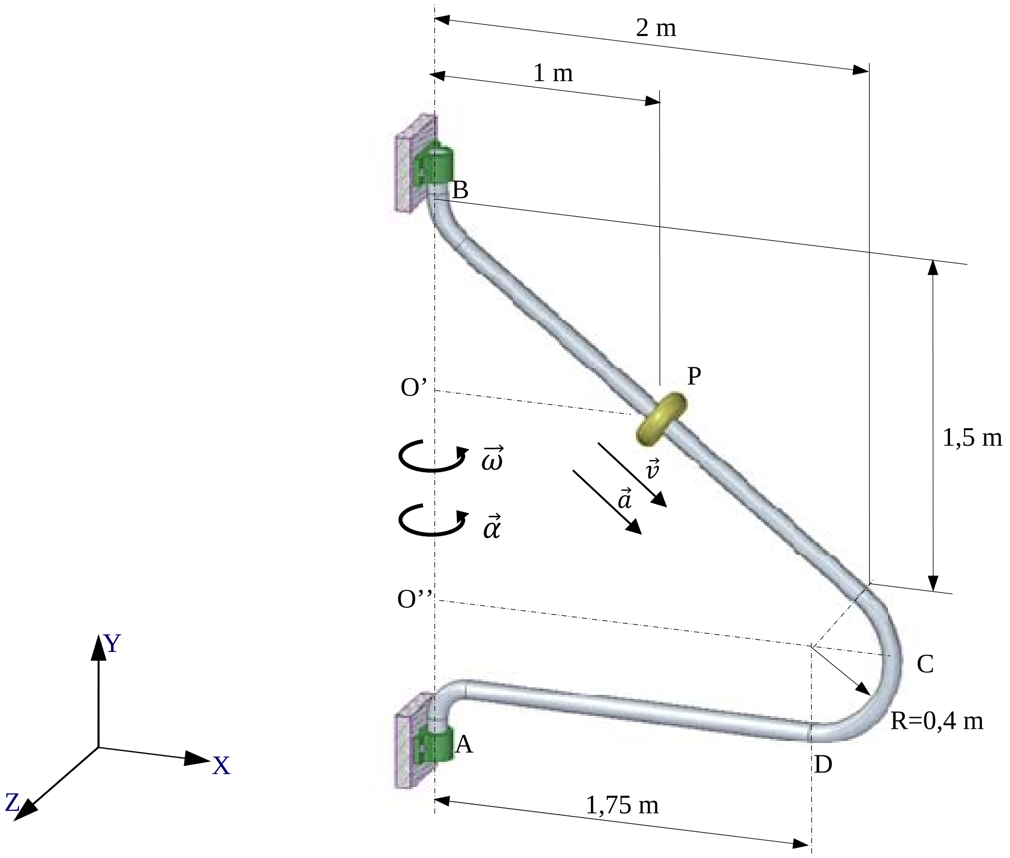
Resolución

En este caso el disco P presenta un movimiento relativo respecto a la barra acodada. Si comparamos este ejercicio con los anteriores, la diferencia radica en que en este caso no existe un punto en común para ambos sólidos. En estos casos, el problema sólo puede plantearse utilizando el movimiento relativo.

Por ello, debe plantearse el movimiento absoluto del disco como la superposición de un movimiento de arrastre y otro relativo. Para ello, se define un sistema de referencia X'Y'Z' soldado al eje en el punto A. También se definen los puntos O' y O'' en el eje, ya que se utilizarán para calcular las velocidades/aceleraciones de arrastre en los diferentes puntos que pide el enunciado, Figura 2.

Tal y como se explicado anteriormente, **el movimiento de arrastre**, es el que tiene el disco por estar montada sobre la barra, que a su vez se mueve. Se calcula considerando el disco soldada a la barra, es decir eliminando el movimiento relativo. Se trata de una rotación pura en torno al eje Y con $\vec{\omega}_1 = 8\vec{j}\,\mathrm{rad}/s$ y $\vec{\alpha}_1 = 4\vec{j}\,\mathrm{m}/s^2$, este movimiento se observa el *Ej9_video1 mov arrastre.*

El **movimiento relativo**, es el del disco observado desde la barra, se calcula eliminando el movimiento de arrastre. En este caso se trata de una traslación con una trayectoria recta en algunos tramos y curva en otros, ver *Ej9_video2 mov relativo*.



a) Velocidad y aceleración del punto P en la posición inicial.

Según la expresión (56) de la teoría, la velocidad del punto P puede obtenerse mediante el siguiente cálculo:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{relativa}}$$

Para calcular la velocidad de arrastre lo más sencillo es definir el punto O’ en eje de rotación.

Para obtener la velocidad relativa, se sabe que $\vec{v}_{\mathrm{P}}{}' = 0{,}3 \cdot \vec{u}_{BP}$, donde 0,3 es el módulo y $\vec{u}_{BP}$ es un vector unitario que va desde el punto B a P y define la dirección y sentido de la velocidad relativa.

Particularizando la expresión anterior para el presente caso, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{O'}} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'P}}}_{v\ arrastre} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{relativa}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0{,}3\,\frac{\vec{\imath} - 0{,}75\vec{\jmath}}{\sqrt{1^2 + 0{,}75^2}} \rightarrow \vec{v}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0{,}24 \\ -0{,}18 \\ -8 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Para el cálculo de las aceleraciones se parte de la expresión (59) de la teoría:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

Al analizar la aceleración de arrastre, una rotación pura de P alrededor del punto O', se observa que aparecen las dos componentes intrínsecas. La aceleración relativa, es $\vec{a}_{\mathrm{P}}{}' = 0{,}1 \cdot \vec{u}_{BP}$, ya tiene la misma dirección y sentido que la velocidad.

Si se particulariza esta expresión, para el caso que se está estudiando, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{0 + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'P}} + \vec{\omega}_1 \wedge \left(\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'P}}\right)}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}}_{a_{arrastre}} + \underbrace{0{,}1\,\frac{\vec{\imath} - 0{,}75\vec{\jmath}}{\sqrt{1^2 + 0{,}75^2}}}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ 0{,}24 & -0{,}18 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{Coriolis}}$$

$$\rightarrow \vec{a}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} -63{,}92 \\ -0{,}06 \\ -7{,}84 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

b) Velocidad y aceleración del punto P en la posición C.

En este punto es necesario hacer la siguiente aclaración. Cuando se calculan velocidades y aceleraciones para un determinado sólido, suele realizarse el estudio para una posición determinada. Los ejes de referencia, tanto los absolutos como los relativos, suelen definirse de forma que simplifiquen el análisis para esa posición concreta.
Cuando el disco ocupa la posición C la barra BCDA ha girado respecto a la posición inicial un ángulo determinado y por lo tanto la barra ya no está contenida en el plano XY. Es interesante calcular la velocidad/aceleración absolutas del disco respecto de unos ejes que simplifiquen los cálculos, para esta nueva posición el sistema de referencia, siendo diferente al inicial, se define exactamente igual que en la figura 1, el eje Y es vertical y el X paralelo al tramo horizontal de la barra. Sólo debe tenerse en cuenta que el sistema de referencia que se utilizará en este apartado, está girado respecto al utilizado en el apartado anterior, al igual ocurre con la barra.

Nuevamente se parte de la ecuación (56) de la teoría, obteniéndose la velocidad del punto P mediante:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_P{}'}_{v_{relativa}}$$

En este caso, para calcular la velocidad de arrastre se define el punto O’’ del eje de rotación.

Y la velocidad relativa, es tangente a la trayectoria del disco, por lo que tiene el sentido negativo del eje Y.

Por otro lado los valores de la velocidad angular de la barra y la velocidad relativa entre el disco y la barra están referidos a la posición representada en la Figura1, pero como no son constantes, es necesario calcular los valores correspondientes a la nueva posición. Para ello, es necesario analizar cómo se desplaza el disco desde la posición inicial al punto C, ver Figura 3:

La distancia entre los puntos P y C es:

$$\sqrt{1^2 + 0{,}75^2} + 2 \cdot R \cdot \pi \frac{(90-\theta)}{360} = 1{,}25 + 0{,}37 = 1{,}62\, m$$

Donde $\theta = arctg\frac{0{,}75}{1} = 36{,}86º = 0{,}64\, rad$

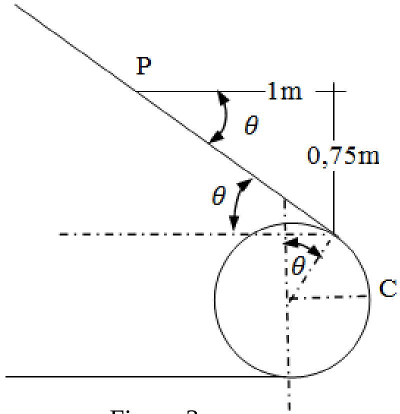


Figura 3

Si se observa el movimiento relativo, puede estudiarse el movimiento del disco P como si fuese una partícula que describe primero un tramo recto y a continuación un tramo circular, ambos con movimiento uniformemente acelerado.

Las expresiones que rigen el movimiento de una partícula con movimiento recto uniformemente acelerado son:

$$S = S_o + vt + \frac{1}{2}at^2$$
$$v = v_o + at$$

$$v^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot (s - s_o)$$

Como se conoce la velocidad relativa inicial del disco (punto P), y la longitud del tramo, sustituyendo en la tercera ecuación, puede obtener la velocidad lineal del disco en el momento en que la trayectoria pasa de ser recta a ser curva:

$$v^2 = 0{,}3^2 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}25 \rightarrow v = 0{,}58\, m/s$$

Y de la segunda ecuación se obtiene el tiempo necesario para ello:

$$v = v_o + at \rightarrow 0{,}58 = 0{,}3 + 0{,}1 \cdot t \rightarrow t = 2{,}8\, s$$

Y las expresiones que rigen el movimiento de una partícula con una trayectoria circular son:

$$\left.\begin{array}{c} \theta = \theta_o + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_o + \alpha t \\ \omega^2 = \omega_o^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_o) \end{array}\right\}$$

Donde $\theta, \omega\, y\, \alpha$ son unas magnitudes angulares semejantes a las definidas para la rotación pura de un sólido rígido.

Para estudiar el movimiento de una partícula en un tramo circular puede analizarse el movimiento de un punto de la periferia de un disco rotando alrededor de un eje fijo, ver figura 4:

Partícula con movimiento circular. Punto P de la periferia de un disco, que rota.

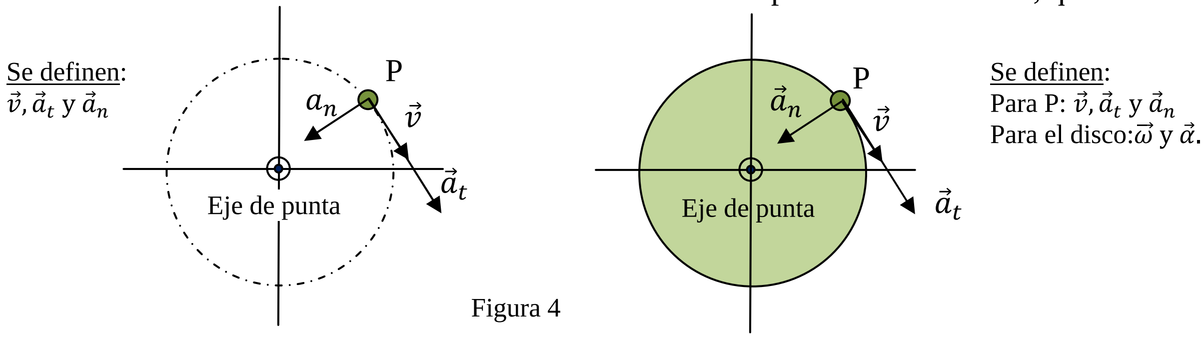


Figura 4

Es decir, se sabe que al iniciar el tramo circular:

$v = 0{,}58 = \omega \cdot R = \omega \cdot 0{,}4 \rightarrow \omega = 1{,}45\, rad/s\,;\ a_t = 0{,}1 = \alpha \cdot R = \alpha \cdot 0{,}4 \rightarrow \alpha = 0{,}25\, rad/s^2$

Se sabe también que durante la trayectoria circular, con movimiento uniformemente acelerado:

$\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_o)$

Por lo que en el punto C, el módulo de la velocidad relativa del disco es:

$\omega^2 = 1{,}45^2 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}64 \rightarrow \omega = 1{,}55\, rad/s$ y $v = \omega \cdot R = 1{,}55 \cdot 0{,}4 = 0{,}62\, m/s.$

Y como es tangente a la trayectoria relativa: $\vec{v}_P{}' = -0{,}62\vec{j}\ [m/s]$

Y el tiempo que invierte el disco en describir el tramo circular, hasta llegar al punto C:

$$\omega = \omega_o + \alpha t \rightarrow 1{,}55 = 1{,}45 + 0{,}25 \cdot t \rightarrow t = 0{,}4\ s$$

Respecto a las aceleraciones relativas:

La aceleración relativa tangencial, es de módulo constante y tangente a la trayectoria en todo momento, por lo que en el punto C: $\vec{a}_P^{t\prime} = -0{,}1\vec{j}\ [m/s^2]$

Y la aceleración relativa normal en el punto C, dirigida hacia el centro de la trayectoria del movimiento relativo:

$$\vec{a}_P^{n\prime} = \frac{v'^2}{R} = -\frac{0{,}62^2}{0{,}4}\vec{i} = -0{,}961\vec{i}\ \ [m/s^2]$$

Para poder obtener el movimiento absoluto del disco, es necesario estudiar primero el de arrastre. Se trata, como en el apartado anterior de una rotación alrededor del eje Y; la aceleración angular del giro es constante y de valor igual al del apartado anterior, $\vec{\alpha}_1 = 4\vec{j}\, rad/s^2$. Para calcular la velocidad en el instante en el que el disco pasa por el punto C, se plantea que:

$\omega = \omega_o + \alpha t \rightarrow \omega = 8 + 4 \cdot (2{,}8 + 0{,}4) \rightarrow \omega = 20{,}8\ rad/s$

Y por lo tanto, en el instante en el que el disco pasa por el punto C:

$$\vec{\omega}_1 = 20{,}8\,\vec{j}\,[rad/s^2]$$

Calculo de la velocidad absoluta en el punto C:

Se llega, por fin, a particularizar la expresión (56) con los valores obtenidos para este apartado:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_{O''} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O''C}}_{v\,arrastre} + \underbrace{\vec{v}_P{}'}_{v_{relativa}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 20{,}8 & 0 \\ 2{,}15 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0{,}62\vec{\jmath} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}62 \\ -44{,}72 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Cálculo de la aceleración absoluta en el punto C:

Para el cálculo de la aceleración vuelve a utilizarse la expresión (59) de la teoría:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}'}_{a_{Coriolis}}$$

Al analizar la aceleración de arrastre, una rotación pura de P alrededor del punto O'', vuelven a aparecer las dos componentes intrínsecas. La aceleración relativa, que ya se ha analizado, presenta también las dos componentes. Particularizando la expresión, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{a}_P = \underbrace{0 + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{O''C} + \vec{\omega}_1 \wedge \left(\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O''C}\right)}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_P{}'}_{a_{Coriolis}}$$

$$\vec{a}_P = \underbrace{0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2{,}15 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 20{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & -44{,}72 \end{vmatrix}}_{a_{arrastre}} - \underbrace{0{,}1\vec{\jmath} + 0{,}961\vec{\imath}}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 20{,}8 & 0 \\ 0 & -0{,}62 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{Coriolis}}$$

$$\rightarrow \vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -931{,}1 \\ -0{,}1 \\ -8{,}6 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Conclusión, resumen

Este ejercicio presenta dos diferencias fundamentales con respecto a los anteriores. La principal es que al no existir un punto en común entre los dos sólidos que se estudian, la barra y el disco en este caso, este ejercicio sólo puede plantearse mediante el movimiento relativo. Por lo tanto, solo puede resolverse, tal y como se ha planteado, sin presentar dos opciones como en los casos anteriores. La segunda diferencia, es que se pide cálculo de velocidades/aceleraciones en dos instantes diferentes y como los movimientos de arrastre y relativo son acelerados, es necesario volver a calcular las velocidades, para un instante que no es el inicial.