Planteamiento

Las aspas del ventilador giran con una velocidad angular ω_2 =0,5 rad/s y una aceleración angular α_2 =0,01 rad/s^2 respecto de su eje BC. A su vez el bloque del motor y las aspas giran en torno al eje vertical con ω_1 =0,1 rad/s y α_1 =2 rad/s^2. Calcular la velocidad y aceleración del punto P para el instante representado en la figura.

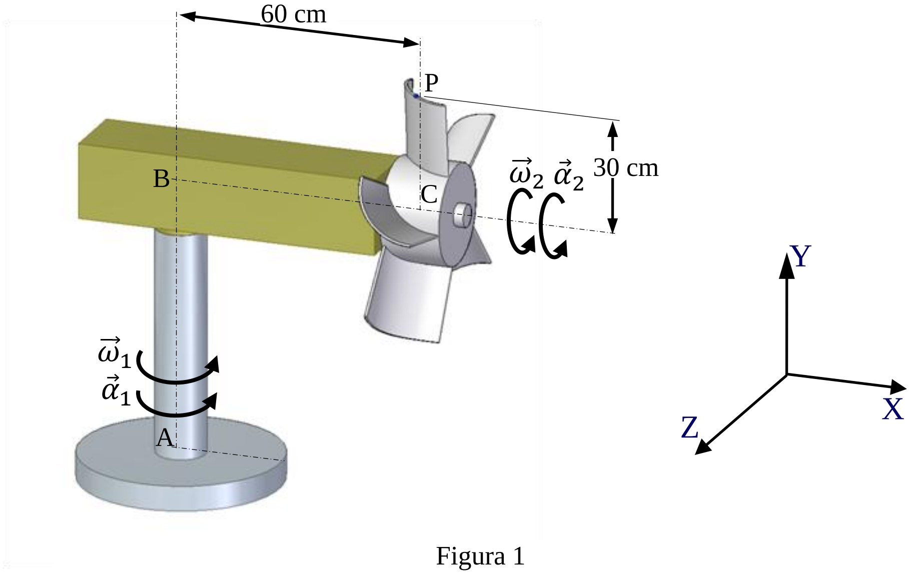

Figura 1

Resolución

Al igual que en el ejercicio anterior, el mecanismo está formado por dos sólidos unidos mediante un punto en común. Al existir el punto C, común a ambos sólidos, es posible plantear el ejercicio considerando el movimiento absoluto de las aspas o mediante la superposición del movimiento de arrastre debido al giro del eje y otro relativo que considere la rotación de las aspas respecto al eje. Para plantear el ejercicio de cualquiera de las dos maneras, es necesario definir un sistema de referencia X'Y'Z' soldado al eje y que por lo tanto se mueve solidariamente a él. En este caso se considera el origen del sistema de referencia auxiliar en el punto B.

1. Considerando el movimiento absoluto de las aspas.
   a. Tomando como punto común a los dos sólidos el punto C

El primer solido es el eje AB que gira con ω_1 =0,1 rad/s y α_1 =0,2 rad/s^2; el segundo sólido son las aspas que giran alrededor del punto C con ω_2 =0,5 rad/s y α_2 =0,01 rad/s^2.

El cálculo de las velocidades/aceleraciones angulares de ambos sólidos se calcula de forma similar a la descrita en el ejercicio anterior. En el caso del eje su velocidad y su aceleración angular vienen directamente definidas en el enunciado; para obtener la velocidad angular absoluta de las aspas, se suma la velocidad angular del eje a la relativa de las aspas y posteriormente se deriva para calcular la aceleración angular absoluta.

Velocidad y aceleración angulares del eje AB: $\vec{\omega}_1$ =0,1$\vec{j}$ rad/s y $\vec{\alpha}_1$ =0,2$\vec{j}$ rad/s^2.

Velocidad y aceleración angulares de las aspas:

$\vec{\omega}_{aspas} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0{,}1\vec{j} + 0{,}5\vec{i}$ rad/s;

$$\vec{\alpha}_{aspas} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{aspas}}{\mathrm{d}t}\right)_{XYZ} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{XYZ} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\right)_{XYZ} = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

Y por lo tanto:

$$\vec{\alpha}_{aspas} = 0{,}2\vec{j} + 0{,}01\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0{,}01\vec{i} + 0{,}2\vec{j} - 0{,}05\vec{k}\, rad/s^2$$

A continuación, se plantean los campos de velocidades y aceleraciones de los dos sólidos.

Se comienza analizando el eje AB, para obtener la velocidad y la aceleración del punto común a ambos sólidos, el punto C.

<u>Campo de velocidades</u>:

Según la expresión (46) de la teoría, para relacionar la velocidad de dos puntos de un mismo sólido debe plantearse que:

$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{eje} \wedge \overrightarrow{BC}$, donde $\vec{v}_B = 0$, ya que pertenece al eje de rotación.

$$\vec{v}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}06 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

<u>Campo de aceleraciones</u>:

Según la expresión (48) de la teoría, las aceleraciones de dos puntos de un mismo sólido, mantienen la siguiente relación:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{eje} \wedge \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_{eje} \wedge \left(\vec{\omega}_{eje} \wedge \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\vec{a}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}06 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{a}_C = \begin{Bmatrix} -0{,}006 \\ 0 \\ -0{,}12 \end{Bmatrix} [m/s^2]}$$

A continuación, se analiza el segundo sólido, es decir las aspas. Se conocen la velocidad y la aceleración de un punto de dicho sólido, punto C, y sus magnitudes angulares, $\vec{\omega}_{aspas}$ y $\vec{\alpha}_{aspas}$.

<u>Campo de velocidades</u>:

Volviendo a plantear la ecuación (46) de la teoría, en este caso para los puntos C y P, ambos pertenecientes a las aspas:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{aspas} \wedge \overrightarrow{CP}$$

$$\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}06 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}09 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

Campo de aceleraciones:

Según la teoría, pueden relacionarse las aceleraciones de dos puntos de un sólido rígido mediante la siguiente expresión (48):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{aspas} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega}_{aspas} \wedge \left(\vec{\omega}_{aspas} \wedge \overrightarrow{CP}\right)$$

$$\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -0{,}006 \\ 0 \\ -0{,}12 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}01 & 0{,}2 & -0{,}05 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}15 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} 0{,}024 \\ -0{,}075 \\ -0{,}117 \end{Bmatrix} [m/s^2]}$$

b. Tomando como punto común a los dos sólidos el punto C

Se puede considerar que el elemento aspas se extiende de manera que su eje llega hasta la intersección con el eje vertical AB. El dibujo no muestra hasta donde llega el eje de las aspas que será interno al bloque BC pero el movimiento no varía si lo alarguemos indefinidamente (otra cuestión es que constructivamente sea más o menos interesante esta dimensión). Por tanto se puede considerar que el punto B también pertenece al sólido que se ha denominado aspas.

Campo de velocidades:

Si los puntos B y P pertenecen al mismo sólido se vuelve a plantear la ecuación (46) de la teoría, ahora simplificada puesto que el punto B tiene es un punto fijo.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{aspas} \wedge \overrightarrow{BP}$$

$$\vec{v}_P = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}09 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

Campo de aceleraciones:

Según la teoría, pueden relacionarse las aceleraciones de dos puntos de un sólido rígido mediante la siguiente expresión (48):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{aspas} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{aspas} \wedge \left(\vec{\omega}_{aspas} \wedge \overrightarrow{BP}\right)$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} -0{,}006 \\ 00 \\ -0{,}12 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}01 & 0{,}2 & -0{,}05 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}09 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{a}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0{,}024 \\ -0{,}075 \\ -0{,}117 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

2. Considerando la combinación de dos movimientos, el relativo y el de arrastre

Una vez más, se comienza diferenciando los dos movimientos:

El movimiento de arrastre, es el debido a la rotación del eje, que arrastra a las aspas, en un giro alrededor de eje Y. Esta rotación se define con $\vec{\omega}_1$ =0,1$\vec{\jmath}$ rad/s y $\vec{\alpha}_1$ =0,2$\vec{\jmath}$ rad/s^2.

El movimiento relativo, es el que se percibe desde el sistema móvil X'Y'Z', que está soldado al eje AB en el punto C y gira al igual que el eje con $\vec{\omega}_1$ =0,1$\vec{\jmath}$ rad/s y $\vec{\alpha}_1$ =0,2$\vec{\jmath}$ rad/s^2. En el movimiento relativo, las aspas giran alrededor del punto C con una velocidad angular ω_2 =0,5 rad/s y una aceleración angular α_2 =0,01 rad/s^2, ambas definidas según el sentido positivo del eje X.

Según la expresión (56) de la teoría, la velocidad del punto P puede obtenerse mediante el siguiente cálculo:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}'}_{v\,arrastre} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{relativa}}$$

La velocidad de arrastre es la que tendría el punto P si se anula el movimiento de las aspas. En este caso se vería al punto P girando directamente alrededor del eje, sería el caso de una rotación pura con $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$. Tal y como podrá observarse al desarrollar la expresión los puntos C y P tienen la misma velocidad de arrastra alrededor del eje AB, ya que se encuentran a la misma distancia de éste.

La velocidad relativa es la queda al analizar las aspas para un observador montado en el eje. Se trata de la una rotación alrededor del punto C, por lo que la velocidad de un punto P de la periferia puede obtenerse analizando su movimiento como un movimiento circular plano, apartado 3.3.1 de la teoría. La velocidad es tangente a la trayectoria y su modulo es $\omega_2 \cdot R$.

Particularizando la expresión anterior para el presente caso, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{C}} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{CP}}}_{v\,arrastre} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{relativa}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}06 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \end{vmatrix} + 0{,}15\vec{k} \rightarrow \vec{v}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}09 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Para el cálculo de las aceleraciones se parte de la expresión (59) de la teoría:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

La aceleración de arrastre es una rotación del punto P alrededor del eje AB; como $\vec{\omega}_1$ no es constante, aparecen la aceleración de arrastre normal y tangencial. Al analizar el movimiento, puede observarse que el movimiento de los puntos C y P alrededor del eje AB son similares, ya que están a la misma distancia del eje de rotación. Por ello, tal y como se comprobará analíticamente, la aceleración de arrastre del punto P, es directamente la aceleración del punto C.

La aceleración relativa se calcula considerando la rotación del punto P alrededor de C y como $\vec{\omega}_2$ tampoco es constante, existe una aceleración relativa normal y otra tangencial. Según el apartado 3.3.1 de la teoría, la aceleración relativa normal va dirigida hacia el centro de la circunferencia y su módulo es $\omega_2^2 \cdot R$. La aceleración relativa tangencial es $\alpha_2 \cdot R$ y es tangente a la circunferencia, al ser α_2 en el mismo sentido que la velocidad.

Si se particulariza esta expresión, para el caso que se está estudiando, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{C}} + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \vec{\omega}_1 \wedge \left(\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -0{,}006 \\ 0 \\ -0{,}12 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{arrastre}} \underbrace{- \underbrace{0{,}5^2 \cdot 0{,}3\vec{j}}_{a_P{}'\,normal} + \underbrace{0{,}01 \cdot 0{,}3\vec{k}}_{a_P{}'\,tangencial}}_{a_{relativa}} + \underbrace{2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}15 \end{vmatrix}}_{a_{Coriolis}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -0{,}006 \\ 0 \\ -0{,}12 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{arrastre}} \underbrace{- \underbrace{0{,}5^2 \cdot 0{,}3\vec{j}}_{a_P{}'\,normal} + \underbrace{0{,}01 \cdot 0{,}3\vec{k}}_{a_P{}'\,tangencial}}_{a_{relativa}} + \underbrace{2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}15 \end{vmatrix}}_{a_{Coriolis}}$$

$$\rightarrow \vec{a}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0{,}024 \\ -0{,}075 \\ -0{,}117 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Conclusión, resumen

Se trata de un ejercicio similar al anterior; el movimiento del sólido estudiado, las aspas, puede descomponerse en la superposición de dos rotaciones, ya que las aspas giran alrededor de un eje que a su vez está girando. Como los dos sólidos tienen un punto en común, el ejercicio ha podido plantearse de dos formas, analizando las aspas con sus magnitudes angulares absolutas, o desde el punto de vista movimiento relativo.

Al comparar este ejercicio con el anterior, la principal diferencia, es que en este caso, el punto común C no está sobre el eje de rotación, y por lo tanto ni su velocidad, ni su aceleración son nulas.