Planteamiento

Un disco de radio r=50mm montado sobre el eje AB, gira con velocidad angular ω_2 =12 rad/s y aceleración angular α_2 =2 rad/s^2 alrededor de su eje C. A su vez, el eje AB gira con ω_1 =8 rad/s y α_1 =1 rad/s^2 . Calcular la velocidad y aceleración del punto P, cuando θ=0º.

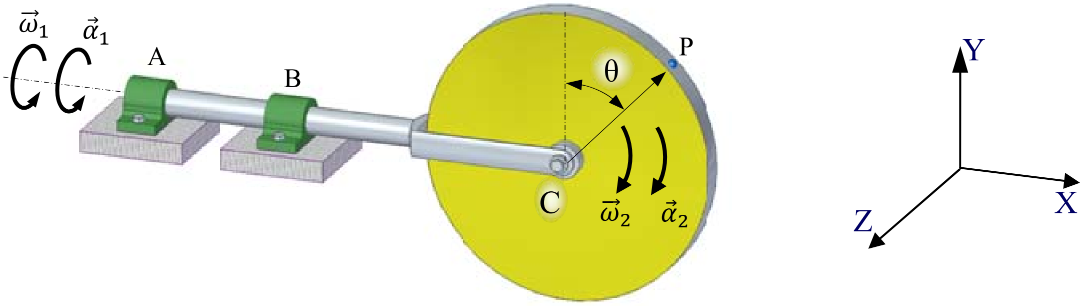

Figura 1

Resolución

Este tipo de ejercicios en los que un sólido que gira está montado sobre otro que también está girando, mediante un punto común, en este caso el punto C, puede resolverse de dos formas:

1. Considerando el movimiento absoluto del disco, ver apartado 3.6 de la teoría. Este planteamiento es posible gracias a que ambos sólidos están unidos por un punto común C.

2. Planteando el movimiento total del disco como la superposición de un movimiento de arrastre y otro relativo.

En cualquiera de los dos casos, se define un sistema de referencia X'Y'Z' soldado al eje y que por lo tanto se mueve solidariamente a él. En este caso, lo más sencillo es considerar su origen en el punto C.

1ª Forma

Considerando el movimiento absoluto del disco.

Para solucionar el problema de esta forma, es necesario considerar el mecanismo formado por dos sólidos unidos por un punto común a ambos. En este caso, el primer solido a considerar es el eje AB que gira con ω_1 =8 rad/s y α_1 =1 rad/s^2, el segundo sólido es el disco que gira alrededor del punto C con ω_2 =12 rad/s y α_2 =2 rad/s^2 . Por último, es evidente que el punto C pertenece a ambos sólidos y por lo tanto, tiene la misma velocidad y/o aceleración analizándolo como perteneciente al eje o al disco.

Se comienza calculando las velocidades y las aceleraciones angulares de los dos sólidos. En el caso del eje su velocidad y su aceleración angular vienen directamente definidas en el enunciado. Sin embargo para calcular la velocidad del disco, es necesario sumar la velocidad del eje y la velocidad con la gira el disco alrededor del punto C. Para calcular su aceleración, se deriva la velocidad, teniendo en cuenta que el vector $\vec{\omega}_2$ está definido en un sistema de referencia que gira junto con el eje, por lo que hay que aplicar la ley de Boure. Así se obtiene que:

Velocidad y aceleración angulares del eje AB: $\vec{\omega}_1 = 8\vec{\imath}$ rad/s y $\vec{\alpha}_1 = 1\vec{\imath}$ rad/s^2.

Velocidad y aceleración angulares del disco:

$$\vec{\omega}_{disco} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 8\vec{\imath} - 12\vec{k}\ rad/s$$

$$\vec{\alpha}_{disco} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{disco}}{\mathrm{d}t}\right)_{XYZ} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{XYZ} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\right)_{XYZ} = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_2}{\mathrm{d}t}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\alpha}_{disco} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

Y por lo tanto:

$$\vec{\alpha}_{disco} = \vec{\imath} - 2\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + 96\vec{\jmath} - 2\vec{k}\ rad/s^2$$

A continuación, se plantean los campos de velocidades y aceleraciones de los dos sólidos. Para poder plantear el campo de velocidades y/o aceleraciones de cualquier sólido rígido es necesario conocer sus magnitudes angulares $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ y la velocidad y/o la aceleración de un punto cualquiera perteneciente al sólido. Se comienza analizando el eje AB, para obtener la velocidad y la aceleración del punto común a ambos sólidos. En este caso como el punto C se encuentra directamente situado sobre el propio eje de rotación del eje AB, puede deducirse que tanto su velocidad como su aceleración son nulas.

Por último, se analiza el segundo sólido, es decir el disco. Se conocen la velocidad y la aceleración de un punto de dicho sólido, punto C, y sus magnitudes angulares, $\vec{\omega}_{disco}$ y $\vec{\alpha}_{disco}$.

<u>Campo de velocidades</u>:

Según la expresión (46) de la teoría, las velocidades de dos puntos de un mismo sólido se relacionan como se indica:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{disco} \wedge \overrightarrow{CP}$$

$$\vec{v}_P = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & -12 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

<u>Campo de aceleraciones</u>:

Según la teoría, pueden relacionarse las aceleraciones de dos puntos de un sólido rígido mediante la siguiente expresión (48):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{disco} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega}_{disco} \wedge \left(\vec{\omega}_{disco} \wedge \overrightarrow{CP}\right)$$

$$\vec{a}_P = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 96 & -2 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & -12 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} 0{,}1 \\ -10{,}4 \\ 0{,}05 \end{Bmatrix} [m/s^2]}$$

Conclusión: en este caso, como el punto C pertenece al eje de rotación, puede considerarse que el punto P está girando alrededor de dicho punto con una velocidad y aceleración angulares que son las totales del movimiento. Este movimiento se ilustra en *Ej7_video4 soporte transparente* donde se han hecho transparentes los soportes para evidenciar el movimiento absoluto descrito.

2ª Forma — Considerando la combinación de dos movimientos, el relativo y el de arrastre

Para existir movimiento relativo deben existir al menos dos elementos, un sólido con movimiento de arrastre y otro con movimiento relativo respecto del anterior; se comienza diferenciando los dos movimientos:

El movimiento de arrastre, ver *Ej7_video2 mov arrastre*, es el del elemento que contiene, mueve o arrastra al otro elemento o partícula. En este caso la horquilla de eje AB obliga a girar al disco con su misma velocidad y aceleración angulares, es decir $\vec{\omega}_1 = 8\vec{\imath}$ rad/s y $\vec{\alpha}_1 = 1\vec{\imath}$ rad/s^2.

El movimiento relativo, ver *Ej7_video1 mov relativo*, del sólido o de la partícula es el que percibe un observador situado sobre el sistema móvil. Ya se ha mencionado, que en este caso se considera un sistema móvil X'Y'Z' soldado al eje AB en el punto C. En el movimiento relativo, el disco se mueve con una velocidad angular $\omega_2 = 12$ rad/s y una aceleración angular $\alpha_2 = 2$ rad/s^2.

Según la expresión (56) de la teoría, la velocidad del punto P puede obtenerse mediante el siguiente cálculo:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{relativa}}$$

La velocidad de arrastre es la que tendría el punto P si se anula el movimiento del disco. En este caso se vería al punto P girando directamente alrededor del eje, sería el caso de una rotación pura con $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$. Tal y como se ha desarrollado en la teoría, la velocidad/aceleración de un sólido en rotación pura se obtiene tomando como referencia cualquier punto del eje, punto C en este caso.

La velocidad relativa es la queda al analizar el disco para un observador montado en el eje. Dicho observador percibe únicamente un disco girando alrededor de un eje que pasa su centro y por lo tanto la velocidad de un punto P de la periferia puede obtenerse analizando su movimiento como un movimiento circular plano, apartado 3.3.1 de la teoría. La velocidad es tangente a la trayectoria y su modulo es $\omega_2 \cdot R = 12 \cdot 0{,}05 = 0{,}6$.

Particularizando la expresión anterior para el presente caso, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{C}} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{CP}}}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{v_{relativa}} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \end{vmatrix} + 0{,}6\vec{\imath} \rightarrow \boxed{\vec{v}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}4 \end{Bmatrix} [m/s]}$$

Para el cálculo de las aceleraciones se parte de la expresión (59) de la teoría:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\mathrm{P}}{}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

Tal y como ha ocurrido anteriormente al analizar las velocidades, la aceleración de arrastre es una rotación del punto P alrededor del eje AB; como $\vec{\omega}_1$ no es constante, aparecen la aceleración de arrastre normal y tangencial. La aceleración relativa se calcula considerando la rotación del punto P alrededor de C y como $\vec{\omega}_2$ tampoco es constante, existe una aceleración relativa normal y otra tangencial. Según el apartado 3.3.1 de la teoría, la aceleración relativa normal va dirigida hacia el centro de la circunferencia y su módulo es $\omega_2^2 \cdot R$. La aceleración relativa tangencial es $\alpha_2 \cdot R$ y es tangente a la circunferencia, al ser α_2 en el mismo sentido que la velocidad.

Si se particulariza esta expresión, para el caso que se está estudiando, sustituyendo los datos y operando:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{0 + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{CP}} + \vec{\omega}_1 \wedge \left(\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{\mathrm{CP}}\right)}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}{}'}_{a_{Coriolis}}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \underbrace{0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{vmatrix}}_{a_{arrastre}} - \underbrace{7,2\vec{\jmath} + 0,1\vec{\imath}}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{a_{Coriolis}} \rightarrow \boxed{\vec{a}_{\mathrm{P}} = \begin{Bmatrix} 0,1 \\ -10,4 \\ 0,05 \end{Bmatrix} [m/s^2]}$$

Conclusión, resumen

Se trata de un ejercicio en el que el movimiento del sólido que se ha estudiado puede descomponerse en la superposición de dos rotaciones diferentes. Esta descomposición es posible cuando un sólido en movimiento se monta sobre otro a su vez que está ya moviéndose, generalmente girando alrededor de un eje fijo.
Cuando los dos sólidos que componen el mecanismo tienen un punto en común es posible abordar el problema desde cualquiera de los puntos de vista propuestos: analizando el sólido con sus magnitudes angulares absolutas, o desde el punto de vista del movimiento relativo.