Planteamiento

En el ejercicio 6 se ha modificado la forma de unión de la barra AB a la barra vertical, en lugar de una deslizadera con rótula se ha incluido una deslizadera con horquilla
a) calcular la velocidad angular de la barra
b) calcular la aceleración de la barra

Considerar las dimensiones de la rótula y de los diámetros de las barras despreciables, de manera que el movimiento se realiza como si los centros de la rótula se desplazaran en los ejes de cada barra.

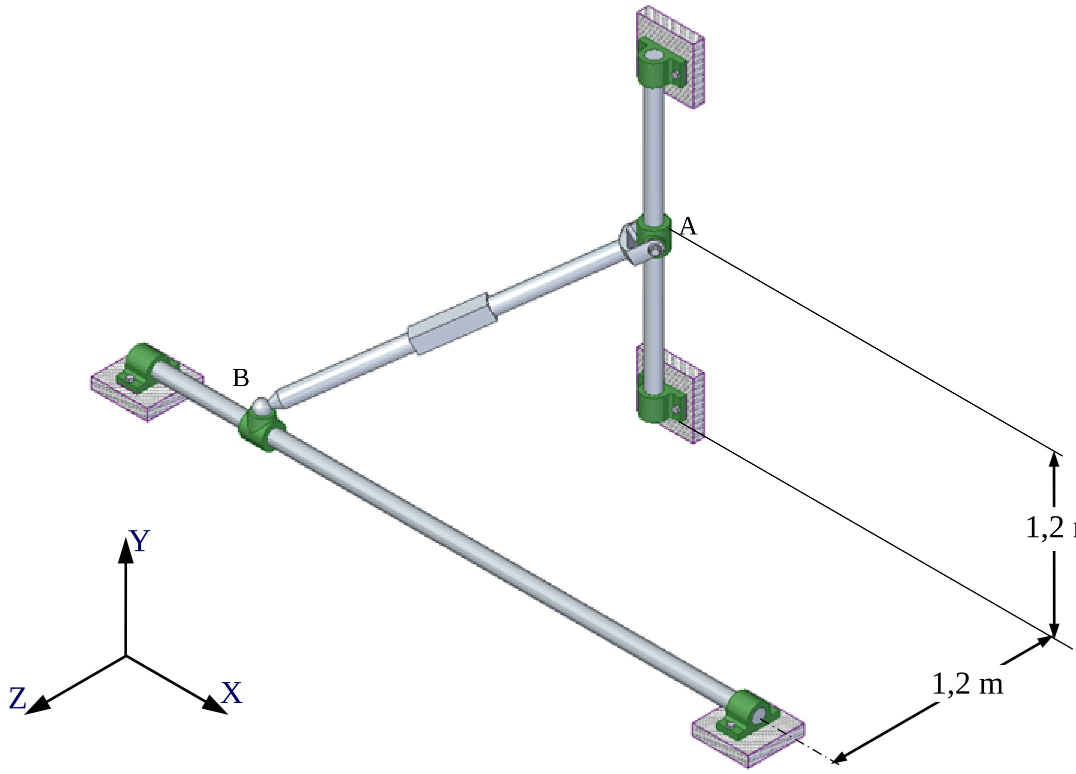

Figura 1

Resolución

Al colocar una horquilla en lugar de una rótula se restringe un grado de libertad más que antes, la Figura 2 ayuda en la explicación posterior que describe los grados de libertad de la unión entre la barra AB y la barra vertical.

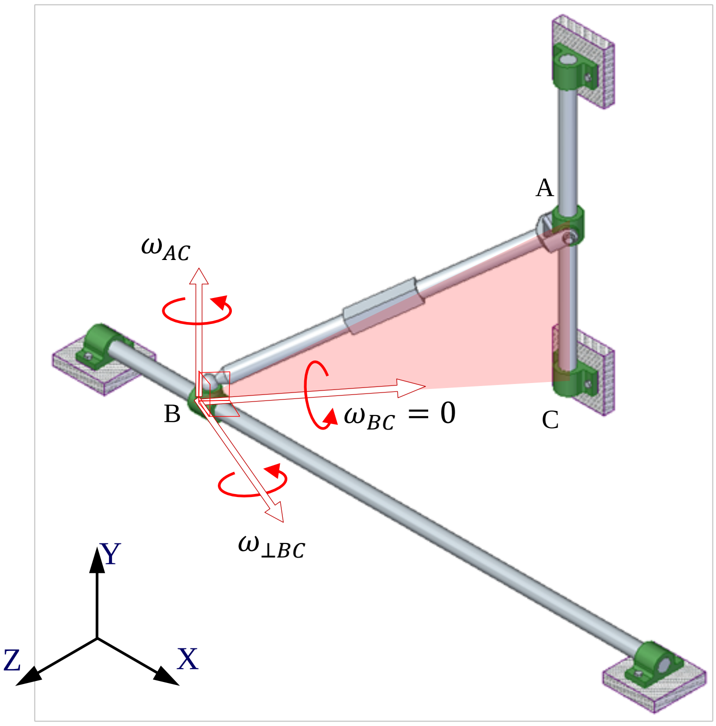

Figura 2

Ahora, si se observa la unión entre la barra AB y la barra fija vertical, existen las siguientes rotaciones posibles:

Rotación de la barra AB alrededor de la barra vertical, este giro está permitido y la componente de la velocidad angular correspondiente se ha denominado ω_{AC}, es debida a la unión entre eje y deslizadera la cual, además del deslizamiento a lo largo de la barra, permite el giro en torno al eje de deslizamiento.

Rotación de la barra AB contenida en el plano definido por los puntos A, B y C sombreado en la figura, a esta rotación corresponde la componente de la velocidad angular denominada $\omega_{\perp BC}$ y es perpendicular al plano, plano en el cual se produce este giro. Esta rotación es la única que permite la horquilla respecto de la deslizadera (antes la unión mediante rótula permitía tres giros y ahora son sólo estos dos)

En este caso, la rotación en torno al eje en la dirección BC está restringido.

La horquilla respecto de la deslizadera impide el giro en torno al eje de la barra AB pero como la deslizadera gira a su vez en torno a la barra fija vertical resulta que el conjunto deslizadera-horquilla únicamente restringe el giro en la dirección BC. Esto se comprueba en *Ej6h_video* donde se ve como la parte prismática de la barra AB se mantiene siempre en la misma posición relativa a su eje.

Como conclusión sabemos que la velocidad angular no tiene componente en la dirección BC, $\omega_{BC} = 0$, por tanto es perpendicular a la dirección BC lo que implica que si se multiplica escalarmente $\vec{\omega}$ por el vector $\overrightarrow{BC}$ el resultado es nulo. En este caso la velocidad angular es determinada:

$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,; \quad \left(\omega_X\,\vec{\imath} + \omega_Y\,\vec{\jmath} + \omega_Z\,\vec{k}\right) \cdot \left(1{,}4\,\vec{\imath} - 1{,}2\,\vec{k}\right) = 0$$

y se obtiene una cuarta ecuación que nos permite determinar la velocidad angular:

$\omega_X\, 1{,}4 - \omega_Z 1{,}2 = 0 \;\; ; \;\; \omega_X = \frac{1{,}2}{1{,}4}\omega_Z \qquad (4)$

a) Las tres ecuaciones iniciales son las mismas del ejercicio anterior, cuando la barra AB estaba unida mediante dos rótulas.

$$v_B = 0 + 1{,}2\omega_Y + 1{,}2\omega_Z \qquad (1)$$
$$0 = -0{,}63 - 1{,}4\omega_Z - 1{,}2\omega_X \quad (2)$$
$$0 = 0 - 1{,}2\omega_X + 1{,}4\omega_Y \qquad (3)$$

Es evidente que se obtendrá el mismo valor para la velocidad del punto B, de la restricción impuesta por la horquilla:

$$\vec{v}_B = -0{,}54\vec{\imath}\ m/s$$

Por lo tanto puede sustituirse, $v_B = -0{,}54$ en la ecuación (1), y el sistema de ecuaciones queda definido por cuatro ecuaciones lineales siendo tres de ellas linealmente dependientes:

$$v_B = 0 + 1{,}2\omega_Y + 1{,}2\omega_Z \qquad (1)$$
$$0 = -0{,}63 - 1{,}4\omega_Z - 1{,}2\omega_X \qquad (2)$$
$$0 = 0 - 1{,}2\omega_X + 1{,}4\omega_Y \qquad (3)$$
$$\omega_X = \frac{1{,}2}{1{,}4}\omega_Z \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (2) $0 = -0{,}63 - 1{,}4\omega_Z - 1{,}2\frac{1{,}2}{1{,}4}\omega_Z \rightarrow \omega_Z = -0{,}2594$

$\rightarrow \omega_X = -0{,}2223 \;\; ; \omega_Y = -0{,}1907$

$$\vec{\omega} = -\begin{Bmatrix} 0{,}2223 \\ 0{,}1907 \\ 0{,}2594 \end{Bmatrix} rad/s$$

b) Se procede de manera similar para el cálculo de las aceleraciones:

Partiendo de que se obtendría el mismo valor para la aceleración del punto B:

$$\vec{a}_B = 0{,}4918\vec{\imath}\ \ m/s^2$$

Y de las tres ecuaciones definidas en ejercicio anterior para el campo de aceleraciones:

$$a_B = 0 + 1{,}2\alpha_Y + 1{,}2\alpha_Z + 0{,}3678 \quad (5)$$
$$0 = 0 - 1{,}4\alpha_Z - 1{,}2\alpha_X + 0{,}3153 \quad (6)$$
$$0 = 0 - 1{,}2\alpha_X + 1{,}4\alpha_Y + 0{,}1707 \quad (7)$$

Se busca la última ecuación planteando que la restricción de la unión mediante la horquilla implica que el siguiente producto escalar es nulo:

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,; \quad \left(\alpha_X\,\vec{\imath} + \alpha_Y\,\vec{\jmath} + \alpha_Z\,\vec{k}\right) \cdot \left(1{,}4\,\vec{\imath} - 1{,}2\,\vec{k}\right) = 0$$

y se obtiene una octava ecuación

$\alpha_X\, 1{,}4 - \alpha_Z 1{,}2 = 0$ (8) ; $\alpha_X = \frac{1{,}2}{1{,}4}\alpha_Z$

Sustituyendo, $\alpha_B = 0{,}4918$ en la ecuación (5), se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales, en el que tres de ellas son linealmente dependientes:

$$\begin{aligned}
0{,}4918 &= 0 + 1{,}2\alpha_Y + 1{,}2\alpha_Z + 0{,}3678 && (5)\\
0 &= 0 - 1{,}4\alpha_Z - 1{,}2\alpha_X + 0{,}3153 && (6)\\
0 &= 0 - 1{,}2\alpha_X + 1{,}4\alpha_Y + 0{,}1707 && (7)\\
\alpha_X &= \frac{1{,}2}{1{,}4}\alpha_Z && (8)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (8) en (6) $0 = 0 - 1{,}4\alpha_Z - 1{,}2\frac{1{,}2}{1{,}4}\alpha_Z + 0{,}3153 \rightarrow \alpha_Z = 0{,}1298$

$\rightarrow \alpha_X = 0{,}1113$; $\alpha_Y = -0{,}026$

$$\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0{,}1113 \\ -0{,}026 \\ 0{,}1298 \end{Bmatrix} rad/s^2$$

Conclusión

En el primer caso, donde la barra se une a las deslizaderas mediante rótulas, la barra AB tiene tres grados de libertad y la velocidad y aceleración angulares resultan indeterminadas. Lo que se ha hecho es suponer que no existe giro en torno al eje de la barra porque este giro es independiente del movimiento de las barras y, para ese supuesto, calcular la velocidad y aceleración angulares.
En el segundo caso, donde la barra se une a una de las deslizaderas mediante una horquilla la barra AB pasa a tener dos grados de libertad porque esta horquilla impide un giro y, ahora sí, la velocidad y aceleración angulares resultan determinadas y por lo tanto pueden calcularse sus valores reales.
Se aconseja la observación de los vídeos para comprobar las diferencias entre los movimientos propuestos en este ejercicio y el anterior, Ej6 y Ej6_h.