Planteamiento

La barra AB de 2,2 m de longitud está enlazada por rótulas a las deslizaderas A y B. Sabiendo que la deslizadera A se desplaza hacia abajo a la velocidad constante de 0,63 m/s,
a) calcular la velocidad de la deslizadera B.
b) calcular la velocidad angular de la barra despreciando el giro de ésta en torno a su propio eje.
c) calcular la aceleración de la deslizadera B.
b) calcular la aceleración angular de la barra despreciando el giro de ésta en torno a su propio eje.

Considerar las dimensiones de las rótulas y de los diámetros de las barras despreciables, de manera que el movimiento se realiza como si los centros de las rótulas se desplazaran en los ejes de cada barra.

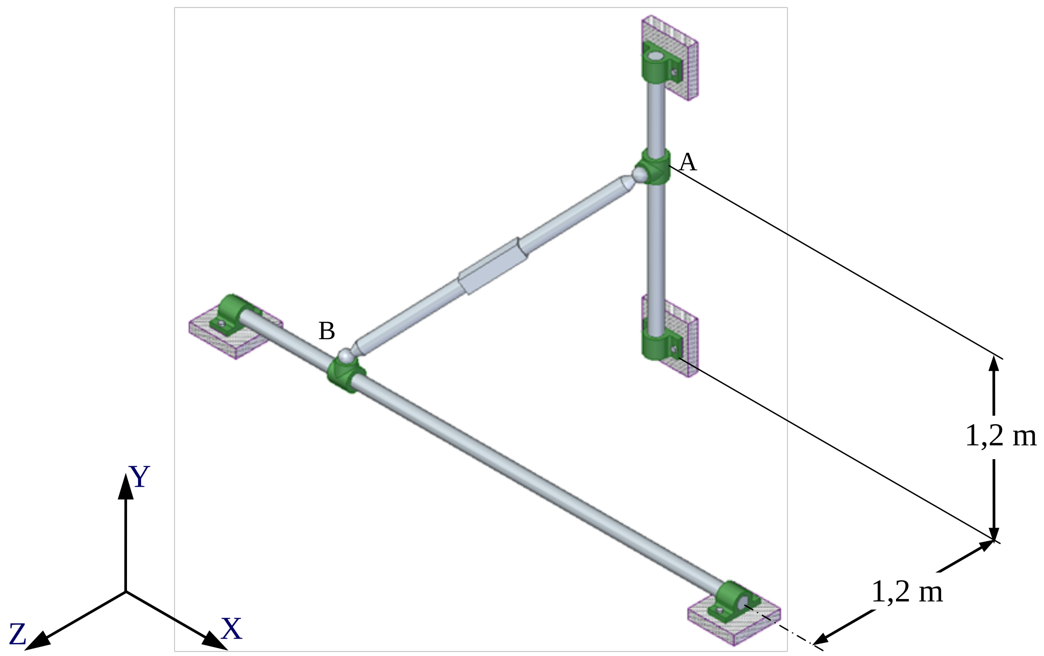

Figura 1

Resolución

Al estudiar el movimiento de la barra AB, se comprueba que ésta modifica su orientación, por lo que no tiene un movimiento de traslación pura; por otro lado, los dos puntos señalados no describen circunferencias concéntricas sino que se mueven según rectas, por lo tanto tampoco se trata de una rotación pura.

Se conocen:

El módulo y la dirección de la velocidad y de la aceleración del punto A: el punto A está obligado a moverse en la recta vertical por lo que la dirección de la velocidad y de la aceleración son en el eje Y. Según el enunciado, el punto A se mueve hacia abajo con una velocidad constante cuyo módulo vale 0,63 m/s, por lo tanto:

$$\vec{v}_A = -0{,}63\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{a}_A = 0$$

La dirección de la velocidad y de la aceleración del punto B: el punto B se mueve sobre una recta horizontal por lo que la dirección de la velocidad y de la aceleración son en la dirección del eje X. A pesar de que el sentido se puede precisar observando el movimiento, va a suponerse positivo y si al obtener el valor del módulo sale un resultado negativo es que la suposición no ha sido acertada.

$$\vec{v}_B = v_B\,\vec{\imath} \quad ; \quad \vec{a}_B = a_B\,\vec{\imath}$$

Se desconoce:

El módulo y la dirección de la velocidad angular del sólido, es decir, el módulo y las tres componentes de la velocidad angular

En la Figura 2 se muestran las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, dos de ellas son dato inicial, falta por determinar la tercera, la componente $\overrightarrow{AB}_X$, que se calcula a partir de la consideración de que el módulo del vector AB es igual a la longitud conocida de la barra.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\overline{AB}_X\right)^2 + \left(\overline{AB}_Y\right)^2 + \left(\overline{AB}_Z\right)^2}\ ; \qquad \overline{AB}_X = \sqrt{2{,}2^2 - 1{,}2^2 - 1{,}2^2} = 1{,}4\ m$$

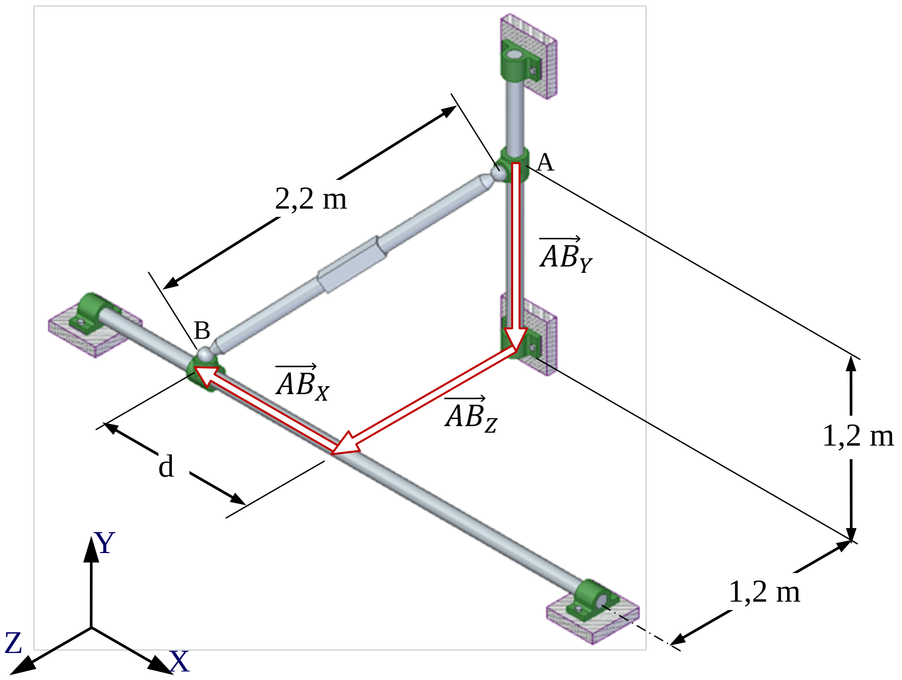

Figura 2

a) Cálculo de velocidades

Se plantea el campo de velocidades para los puntos A y B:

Si A, B ∈ barra $\quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\begin{Bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}63 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ -1{,}4 & -1{,}2 & 1{,}2 \end{vmatrix} ; \begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow & v_B = 0 + 1{,}2\omega_Y + 1{,}2\omega_Z & (1) \\ \vec{\jmath} \rightarrow & 0 = -0{,}63 - 1{,}4\omega_Z - 1{,}2\omega_X & (2) \\ \vec{k} \rightarrow & 0 = 0 - 1{,}2\omega_X + 1{,}4\omega_Y & (3) \end{cases}$$

Sabemos que las tres componentes de la velocidad angular tienen una relación de combinación lineal en las tres ecuaciones (1), (2) y (3), obtenidas estas a partir de un determinante. Si encontramos la relación lineal existente podremos lograr la cancelación de todas las componentes de la velocidad angular. Se operan las ecuaciones anteriores de la siguiente manera:

$$(1) \cdot 1{,}4 + (2) \cdot 1{,}2 - (3) \cdot 1{,}2$$

La ecuación resultante sigue cumpliéndose:

$$v_B \cdot 1{,}4 = (1{,}2\omega_Y + 1{,}2\omega_Z) \cdot 1{,}4 + (-0{,}63 - 1{,}4\omega_Z - 1{,}2\omega_X) \cdot 1{,}2 - (-1{,}2\omega_X + 1{,}4\omega_Y) \cdot 1{,}2$$

Se anulan las componentes de $\vec{\omega}$ y se obtiene una ecuación que nos permite calcular v_B:

$$v_B \cdot 1{,}4 = -0{,}63 \cdot 1{,}2 \quad \rightarrow \quad v_B = -0{,}54\, m/s$$

$$\vec{v}_B = -0{,}54\, \vec{\imath}\ m/s$$

b) Se ha obtenido el valor de la velocidad del punto B pero la velocidad angular de la barra resulta indeterminada debido a que el movimiento de los puntos A y B no influye en el giro de la barra en torno a su propio eje. El hecho de que la barra gira libremente alrededor de su propio eje se comprende bien si se piensa que puede girar sobre sí misma incluso con los puntos A y B en reposo, se puede observar este giro independiente en el vídeo *Ej6_video2 solo giro barra*.

Dado que la velocidad angular de la barra es indeterminada se puede bloquear el giro en torno al eje de la barra, ver simulación en *Ej6_video1 barra sin giro*, porque esta componente es independiente del valor de las otras dos y, así, eliminar una incógnita. Se desprecia la componente de la velocidad en la dirección de la barra o, lo que es lo mismo, se considera la velocidad angular perpendicular a la barra, entonces debe cumplir que el producto escalar del vector velocidad angular y cualquier vector en la dirección de la barra ha de ser nulo. Por ello puede plantearse:

$$\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\,; \quad (\omega_X\, \vec{\imath} + \omega_Y\, \vec{\jmath} + \omega_Z\, \vec{k}) + (-1{,}4\, \vec{\imath} - 1{,}2\, \vec{\jmath} + 1{,}2\, \vec{k}) = 0$$

y se obtiene una cuarta ecuación:

$$-\omega_X\, 1{,}4 - \omega_Y\, 1{,}2 + \omega_Z 1{,}2 = 0 \qquad (4)$$

De manera que ahora sí pueden despejarse las tres componentes:

(1) $\quad - 0{,}54 = 0 + 1{,}2\omega_Y + 1{,}2\omega_Z\ ;\ \omega_Z = -0{,}45 - \omega_Y$

(3) $\quad 0 = 0 - 1{,}2\omega_X + 1{,}4\omega_Y\,; \quad \omega_X = \frac{1{,}4}{1{,}2}\omega_Y$

$$(4) \qquad -\frac{1{,}4}{1{,}2}\omega_Y\, 1{,}4 - \omega_Y\, 1{,}2 + (-0{,}45 - \omega_Y)1{,}2 = 0 \quad ; \quad \omega_Y = 0{,}1339$$

$\omega_X = 0{,}1562 \quad ; \omega_Z - 0{,}5839$

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0{,}1562 \\ 0{,}1339 \\ -0{,}5839 \end{Bmatrix} rad/s$$

c) Se procede de manera similar para el cálculo de las aceleraciones

$$\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

del cálculo de velocidades despejamos el producto vectorial $\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{v}_{\mathrm{A}} = \begin{Bmatrix} -0{,}54 \\ 0{,}63 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_B\,\vec{\imath} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \alpha_X & \alpha_Y & \alpha_Z \\ -1{,}4 & -1{,}2 & 1{,}2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}1562 & 0{,}1339 & -0{,}5839 \\ -0{,}54 & 0{,}63 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow \quad a_B = 0 + 1{,}2\alpha_Y + 1{,}2\alpha_Z + 0{,}3678 \quad (5) \\ \vec{\jmath} \rightarrow \quad 0 = 0 - 1{,}4\alpha_Z - 1{,}2\alpha_X + 0{,}3153 \quad (6) \\ \vec{k} \rightarrow \quad 0 = 0 - 1{,}2\alpha_X + 1{,}4\alpha_Y + 0{,}1707 \quad (7) \end{cases}$$

se operan las ecuaciones anteriores para eliminar las componentes de α, obsérvese que la combinación es la misma que existe entre las componentes de la velocidad angular:

$$(1) \cdot 1{,}4 + (2) \cdot 1{,}2 - (3) \cdot 1{,}2$$

$$a_B \cdot 1{,}4 = (1{,}2\alpha_Y + 1{,}2\alpha_Z + 0{,}3678) \cdot 1{,}4 + (-1{,}4\alpha_Z - 1{,}2\alpha_X + 0{,}3153) \cdot 1{,}2 - (0 - 1{,}2\alpha_X + 1{,}4\alpha_Y + 0{,}1707) \cdot 1{,}2$$

$$a_B \cdot 1{,}4 = 0{,}3678 \cdot 1{,}4 + 0{,}3153 \cdot 1{,}2 - 0{,}1707 \cdot 1{,}2 \quad \rightarrow \quad a_B = 0{,}4918\, m/s^2$$

$$\vec{a}_B = 0{,}4918\,\vec{\imath}\;\, m/s^2$$

d) Una vez obtenida la aceleración del punto B, al igual que se ha procedido con la velocidades, se puede bloquear el giro en torno al eje de la barra y calcular las dos componentes de la aceleración en el plano perpendicular al de la barra, se cumple que el producto escalar del vector aceleración angular y un vector en la dirección de la barra ha de ser nulo:

$$\vec{\alpha} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\,; \quad \left(\alpha_X\,\vec{\imath} + \alpha_Y\,\vec{\jmath} + \alpha_Z\,\vec{k}\right) + \left(-1{,}4\,\vec{\imath} - 1{,}2\,\vec{\jmath} + 1{,}2\,\vec{k}\right) = 0$$

y se obtiene una cuarta ecuación:

$$-\alpha_X\, 1{,}4 - \alpha_Y\, 1{,}2 + \alpha_Z 1{,}2 = 0\,; \qquad -\alpha_X \frac{1{,}4}{1{,}2} - \alpha_Y + \alpha_Z = 0 \qquad (8)$$

Sustituyendo en las ecuaciones escalares anteriores se despejan las tres componentes.

$$(5) \qquad 0{,}4918 = 0 + 1{,}2\alpha_Y + 1{,}2\alpha_Z + 0{,}3678 \;; \quad \alpha_Z = 0{,}1033 - \alpha_Y$$

$$(7) \qquad 0 = -1{,}2\alpha_X + 1{,}4\alpha_Y + 0{,}1707 \;; \quad \alpha_X = 0{,}1422 + \frac{1{,}4}{1{,}2}\alpha_Y$$

$$(8) \qquad -\left(0{,}1422 + \frac{1{,}4}{1{,}2}\alpha_Y\right)\frac{1{,}4}{1{,}2} - \alpha_Y + 0{,}1033 - \alpha_Y = 0 \;; \quad \alpha_Y = -0{,}018$$

$\alpha_X = 0{,}1212$; $\alpha_Z = 0{,}1213$

$$\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0{,}1212 \\ -0{,}018 \\ 0{,}1213 \end{Bmatrix} rad/s^2$$

Conclusión, resumen

Se trata del estudio del movimiento general de un sólido que se debe resolver mediante el planteamiento de los campos de velocidades y aceleraciones para el movimiento absoluto.

En este ejercicio el problema radica en que, para las velocidades y también para las aceleraciones, se llega a un sistema de ecuaciones con menos ecuaciones que incógnitas, a pesar de ello se puede despejar una incógnita que no sea una de las componentes de la velocidad o aceleración angulares mediante la estrategia matemática empleada. El asunto es que la velocidad y la aceleración angulares son independientes del movimiento de los dos puntos A y B y, lógicamente no se podrán determinar a partir de la consideración del movimiento de éstos, comprobar cómo la barra gira en torno a su eje libremente en *Ej6_video3 giro combinado.*