Planteamiento

Dada una bola de 0,218 m de diámetro se le hace rodar sin deslizar sobre el plano horizontal xz. En el instante representado O es el punto de contacto con el suelo, la velocidad del punto A es $\vec{v}_A = 4{,}8\vec{\imath} - 4{,}8\vec{\jmath} + 3{,}6\vec{k}\ [m/s]$ y la del punto D, $\vec{v}_D = 9{,}6\vec{\imath} + 7{,}2\vec{k}\ [m/s]$. Hallar:
a) La velocidad angular de la bola.
b) La velocidad del centro C de la bola.

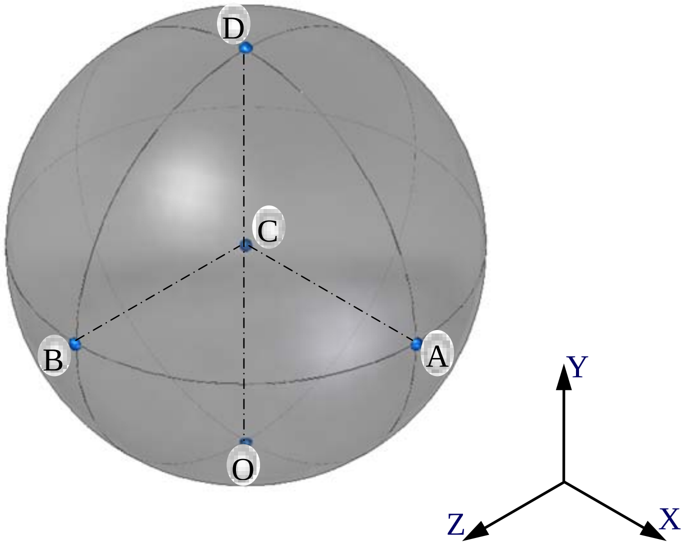

Figura 1

Resolución

La bola rueda, esto implica que gira y por tanto no se traslada con traslación pura, sin embargo no existe eje fijo de rotación, de hecho tampoco existe ningún punto fijo en el sólido. Se descartan por lo tanto la traslación pura y la rotación pura, se concluyéndose que se trata de movimiento general.

En primer lugar se sabe que el movimiento de rodadura se produce sin deslizamiento, por ello ha de cumplir la primera condición de rodadura que dice que las velocidades de los puntos en contacto, punto O de la rueda y punto O del plano, son las mismas, es decir, si el plano es fijo $\vec{v}_{\mathrm{O}} = 0$.

Conocida la velocidad del punto O, además de la de los puntos A y D, podremos plantear dos ecuaciones vectoriales de las que obtendremos 4 ecuaciones escalares independientes, esto permitirá calcular las tres componentes de la velocidad angular de la bola.

a) Se comienza planteando el campo de velocidades para los puntos O, punto con velocidad nula y por tanto que implica cálculos más sencillos, y D:

Si O, D ∈ barra $\quad \vec{v}_{\mathrm{D}} = \vec{v}_{\mathrm{O}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OD}$

$$\begin{Bmatrix} 9,6 \\ 0 \\ 7,2 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ 0 & 0,218 & 0 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow 9,6 = -0,218\omega_Z \\ \vec{\jmath} \rightarrow 0 = 0 \\ \vec{k} \rightarrow 7,2 = 0,218\omega_X \end{cases} \; ; \rightarrow \; \begin{matrix} \omega_Z = -44,04 \\ \omega_X = 33,03 \end{matrix}$$

Para obtener el tercera componente ω_Y se plantea campo de velocidades para los puntos O y A.

Si O, A ∈ barra $\quad \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$

$$\begin{Bmatrix} 4,8 \\ -4,8 \\ 3,6 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 33,03 & \omega_Y & -44,04 \\ 0,109 & 0,109 & 0 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow 4,8 = 4,8 \\ \vec{\jmath} \rightarrow -4,8 = -4,8 \\ \vec{k} \rightarrow 3,6 = 3,6 - \; 0,109\omega_Y \end{cases} \; ; \rightarrow \; \omega_Y = 0 \; ;$$

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 33,03 \\ 0 \\ -44,04 \end{Bmatrix} [rad/s]$$

b) Conocida la velocidad de un punto cualquiera del sólido y su velocidad angular se puede calcular la velocidad de cualquier punto perteneciente al sólido. Se conocen $\vec{v}_A, \vec{v}_O$ y $\vec{v}_D$, así que la velocidad del punto C se puede calcular planteando el campo de velocidades para diferentes parejas de puntos:

Si A, C ∈ barra $\quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$

Si O, C ∈ barra $\quad \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}$

Si D, C ∈ barra $\quad \vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DC}$

se elige la opción que implica un cálculo más sencillo, la segunda.

$$\vec{v}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 33,03 & 0 & -44,04 \\ 0 & 0,109 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 4,8 \\ 0 \\ 3,6 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Conclusión, resumen

Se trata de sólido con movimiento general del cual son conocidas las velocidades de tres puntos, A, D y O y del que se quieren determinar las tres componentes de su velocidad angular.

Con tres velocidades se pueden plantear tres ecuaciones vectoriales diferentes.

Si A, D ∈ barra $\quad \vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DA}$

Si A, O ∈ barra $\quad \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$

Si D, O ∈ barra $\quad \vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}$

Sólo son necesarias dos ecuaciones con las cuales se podrían despejar hasta 4 incógnitas; se eligen la segunda y la tercera que son las que incluyen al punto O, cuya velocidad es nula, hecho que facilita los cálculos.

La velocidad del punto O no es un dato inmediato si no que se deduce a partir de la primera condición de rodadura que dice que si no hay deslizamiento entre dos sólidos en contacto la velocidad relativa entre los puntos en contacto de los dos sólidos ha de ser nula.

En este ejercicio no se pide cálculo de aceleraciones, si fuera el caso, se debería tener en cuenta la segunda condición de rodadura que impone que las proyecciones de las aceleraciones sobre la tangente común en el punto de contacto son iguales.