Planteamiento

Se sueldan tres varillas a una rótula para formar la pieza de la Figura 1. El extremo de la varilla OA se mueve sobre el plano inclinado perpendicular al plano xy mientras que el extremo de la varilla 0B lo hace sobre al plano horizontal. Sabiendo que en el instante representado $\vec{v}_B = 15\vec{k}\ m/s$, hallar:

a) La velocidad angular del conjunto y la velocidad del punto C.

b) Sabiendo que la celeridad del punto B es constante, la aceleración angular del conjunto y la aceleración del punto C en el instante representado.

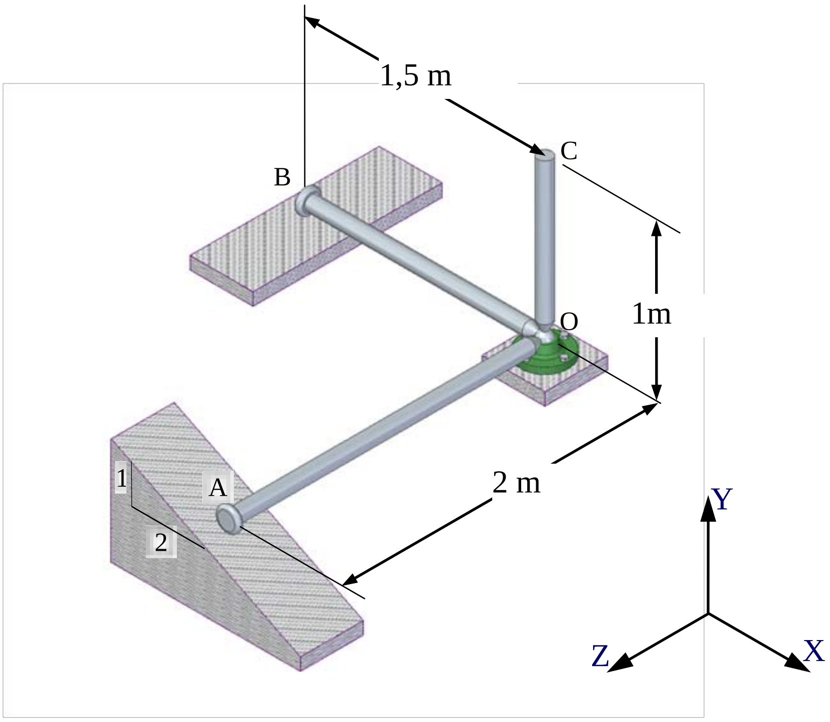

Figura 1

Resolución

Para comenzar se clasifica el tipo de movimiento de la pieza.

Puede comenzar observándose que la barra OB cambia su orientación al moverse y que, consecuentemente, su movimiento no es de traslación, ya que recordando el apdo. 3.2 de la teoría, *Un sólido rígido se mueve con traslación pura cuando cualquier recta contenida en el cuerpo mantiene su dirección en el movimiento.*

Por otro lado, en el apdo.3.3, se dice que *un sólido rígido realiza un movimiento de rotación pura cuando todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran alineados en el eje de rotación*. Tanto el punto A como el punto B describen trayectorias circulares con centro en O, pero estas circunferencias no son concéntricas, así que tampoco se trata de un movimiento de rotación pura.

No se cumplen las condiciones de ninguno de los movimientos que hemos denominado elementales: traslación y rotación pura, se trata por tanto de un movimiento general. Las velocidades y aceleraciones en el movimiento general se estudian aplicando lo explicado sobre el campo de velocidades y aceleraciones (ver apdo. 3.6 de la teoría) que nos permite establecer la relación existente entre las velocidades de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido y sus aceleraciones, estas son:

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ para velocidades

y $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$ para aceleraciones

Estas ecuaciones permiten interpretar el movimiento general de la manera siguiente: dados dos puntos A y B se puede considerar el movimiento del punto A, perteneciente al sólido, como la suma de dos movimientos: A se traslada igual que lo hace el punto B, también perteneciente al sólido, y A también rota alrededor de B. Debe cumplirse:

A, B ∈ sólido rígido

$\vec{\omega}$ es la velocidad angular absoluta del sólido rígido, debe incluir todas las variaciones en la orientación sufridas por el sólido.

Puesto que lo anterior es aplicable a cualquier pareja de puntos, lógicamente se relacionarán velocidades y/o aceleraciones de dos puntos cuyos datos sean conocidos.

En este caso hay un punto en concreto, el punto O que es un punto fijo, no solo se conoce su velocidad y aceleración sino que ambas son nulas, este hecho facilitará los cálculos. Siempre que el sólido rígido tenga un punto fijo puede ser muy interesante emplearlo.

a) La velocidad angular del conjunto y la velocidad del punto C:

Se conoce:

Módulo y dirección de la velocidad del punto O, $\vec{v}_O = 0$

Módulo y dirección de la velocidad del punto B, $\vec{v}_B = 15\vec{k}\ m/s$

Dirección de la velocidad del punto A: A describe una circunferencia contenida en el plano inclinado extendido, por tanto su velocidad está en dicho plano y es perpendicular al radio OA,→ $v_{A_Z} = 0$. Asimismo, si B se mueve hacia el sentido positivo del eje Z, el punto A debe descender el plano inclinado. También se indica en el gráfico el ángulo del plano inclinado con la horizontal, para un vector situado en dicho plano la componente en la dirección X es el doble que en la dirección Y. Expresado vectorialmente:

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 2v_{A_Y} \\ -v_{A_Y} \\ 0 \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]$$

Se desconoce:

módulo de la velocidad del punto A

módulo y dirección de la velocidad angular del sólido, es decir, el módulo y las tres componentes de la velocidad angular

En la Figura 2 se aprecian las trayectorias de los puntos A y B y como las velocidades son tangentes a éstas.

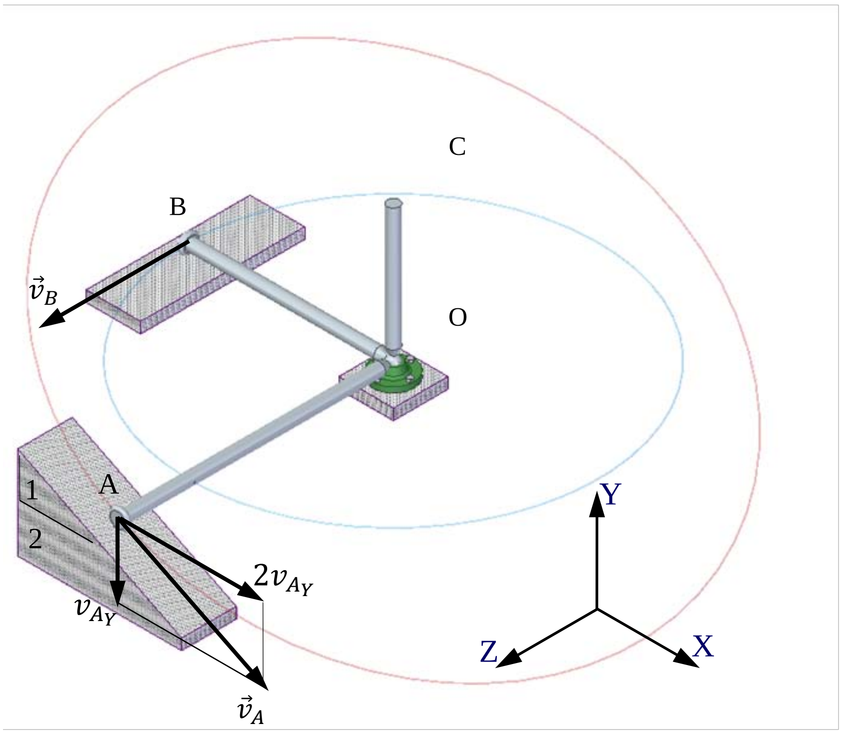

Figura 2

Se plantea el campo de velocidades para los puntos O y B:

Si O, B ∈ barra $\quad \vec{v}_\mathrm{B} = \vec{v}_\mathrm{O} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ -1{,}5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} \to 0 = 0 \\ \vec{\jmath} \to 0 = -1{,}5\omega_Z \\ \vec{k} \to 15 = 1{,}5\omega_Y \end{cases} \; ; \rightarrow \begin{matrix} \omega_Z = 0 \\ \omega_Y = 10 \;\; rad/s \end{matrix}$$

A partir de la ecuación vectorial con tres dimensiones se plantean tres ecuaciones escalares, pero únicamente pueden despejarse dos incógnitas. Esto se debe a que las tres ecuaciones que resultan están relacionadas mediante una combinación lineal.

Para obtener el valor de la componente ω_X será necesario plantear otra ecuación vectorial. A continuación se plantea el campo de velocidades para los puntos O y A, teniendo en cuenta que en esta ecuación ya son conocidas dos componentes de la velocidad angular

Si O, A ∈ barra $\quad \vec{v}_\mathrm{A} = \vec{v}_\mathrm{O} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$

$$\begin{Bmatrix} 2v_{A_Y} \\ -v_{A_Y} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega_X & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \; ; \quad \begin{cases} \vec{\imath} \to 2v_{A_Y} = 20 \\ \vec{\jmath} \to -v_{A_Y} = -2\omega_X \\ \vec{k} \to 0 = 0 \end{cases} \; ; \rightarrow \begin{matrix} v_{A_Y} = 10 \;\; \frac{m}{s} \\ \omega_X = 5 \;\; rad/s \end{matrix}$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s] \quad ; \quad \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} [rad/s]$$

Conocida la velocidad de un punto del sólido y su velocidad angular se puede calcular la velocidad de cualquier punto perteneciente al sólido. La velocidad del punto C se puede calcular a partir de la velocidad de A, de B o de O. se opta por el más sencillo, C.

Se plantea el campo de velocidades para los puntos O y C

Si O, C ∈ barra $\quad \vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}$

$$\vec{v}_C = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix} [m/s]$$

b) Sabiendo que la celeridad del punto B es constante, la aceleración angular del conjunto y la aceleración del punto C en el instante representado.

Para el cálculo de las aceleraciones se procede de manera similar.

Se conoce:

El módulo y dirección de la aceleración del punto O, punto fijo, $\vec{a}_O = 0$

La celeridad del punto B es constante, esto implica que su aceleración tangencial es nula, es decir, que $\vec{a}_B^T = 0$.

La aceleración normal siempre está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria y su módulo es $a_B^N = \frac{\mathrm{v}_B^2}{\overline{OB}}$

$$\rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_B^T + \vec{a}_B^N = 0 + \frac{\mathrm{v}_B^2}{\overline{OB}}\vec{\imath} = \frac{15^2}{1{,}5}\vec{\imath} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La dirección de la aceleración tangencial del punto A, la misma que la de la velocidad, ambas son tangentes a la trayectoria, $a_{A_Z}^T = 0$ y existe la misma proporción entre coordenadas X e Y, por tanto $\quad \vec{a}_A^T = \begin{Bmatrix} 2a_{A_Y}^T \\ -a_{A_Y}^T \\ 0 \end{Bmatrix}$

la aceleración normal está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria y su módulo es $a_A^N = \frac{\mathrm{v}_A^2}{\overline{OA}}$

$$\vec{a}_A^N = -\frac{\mathrm{v}_A^2}{\overline{OA}}\vec{k} = -\frac{\left(10\sqrt{5}\right)^2}{2}\vec{k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_A^T + \vec{a}_A^N = \begin{Bmatrix} 2a_{A_Y}^T \\ -a_{A_Y}^T \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2a_{A_Y}^T \\ -a_{A_Y}^T \\ -250 \end{Bmatrix}$$

Se desconoce:

Módulo de la aceleración tangencial del punto A.

Módulo y dirección de la aceleración angular del sólido, es decir, módulo y las tres componentes de la aceleración angular.

Se plantea el campo de aceleraciones para los puntos O y B donde O, B ∈ barra:

$$\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}) = \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{B}}$$

$$\begin{Bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \alpha_X & \alpha_Y & \alpha_Z \\ -1,5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} ; \begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow 150 = 150 \\ \vec{\jmath} \rightarrow 0 = -1,5\alpha_Z - 75 \\ \vec{k} \rightarrow 0 = 1,5\alpha_Y \end{cases} ;$$

$$\rightarrow \begin{matrix} \alpha_Z = -5 \\ \alpha_Y = 0 \end{matrix}$$

Para obtener el valor de la componente α_X se plantea el campo de aceleraciones para los puntos O y A donde O, A ∈ barra

$$\vec{a}_{\mathrm{A}} = \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) = \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathrm{A}}$$

$$\begin{Bmatrix} 2a_{A_Y}^T \\ -a_{A_Y}^T \\ -250 \end{Bmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \alpha_X & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 20 & -10 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{cases} \vec{\imath} \rightarrow 2a_{A_Y}^T = 0 \\ \vec{\jmath} \rightarrow -a_{A_Y}^T = -2\alpha_X \\ \vec{k} \rightarrow -250 = -250 \end{cases} ;$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a_{A_Y}^T = 0 \\ \alpha_X = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{Bmatrix} [m/s] \quad ; \quad \vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} [rad/s]$$

Se plantea el campo de aceleraciones para los puntos O y C para calcular la aceleración de C

$$\vec{a}_{\mathrm{C}} = \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OC} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OC}) = 0 + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 55 \\ -25 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Conclusión, resumen

Se trata de un ejercicio en el que se planta el movimiento general de un sólido rígido con velocidad y aceleración angulares desconocidas y se conocen datos referentes a velocidades y aceleraciones de al menos tres puntos pertenecientes al sólido, puntos A, O y B.

La ecuación del campo de velocidades del movimiento general o absoluto nos permite generar, para una pareja de puntos O, B pertenecientes al sólido rígido, una ecuación vectorial en el espacio tridimensional. A partir de la ecuación vectorial se plantean tres ecuaciones escalares que permiten despejar dos incógnitas, ω_Z y ω_Y. Es necesario volver a aplicar la ecuación del campo de velocidades para una pareja de puntos diferentes, O, A $\in$ sólido rígido, esto nos permite despejar otras dos nuevas incógnitas, ω_X y v_{A_Y}.

En el caso de las aceleraciones el procedimiento es similar, únicamente debe tenerse en cuenta que al emplear las ecuación del campo de aceleraciones del movimiento general o absoluto se incluyen las componentes tangencial y normal de la aceleración.