Enunciado

La varilla acodada ABCDE está sujeta mediante dos rótulas en los puntos A y B de manera que está obligada a girar en torno al eje definido por la recta AE. La barra gira con una velocidad angular $\omega = 12\, rad/s$ que disminuye y con una aceleración angular $\alpha = 60\, rad/s^2$, ambas en sentido horario si se observan desde el punto E. Se pide calcular la velocidad y aceleración del punto C.

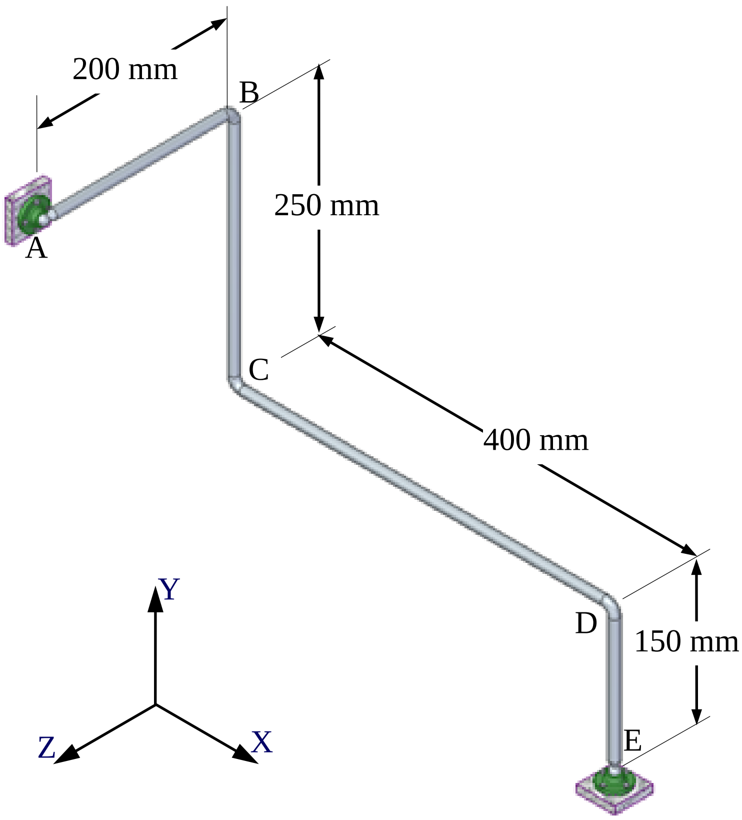

Figura 1

Resolución

Para calcular la velocidad y aceleración del punto B hacemos un primer análisis:

a) El punto B pertenece a la barra acodada.

b) La barra está rotando y lo hace en torno al eje AE que es un eje fijo, por tanto se trata de una rotación pura o rotación en torno a un eje fijo

En el caso de la rotación pura, los centros de las trayectorias de todos los puntos están situados en el eje de rotación, concretamente sobre el eje AE. Sin embargo, en este caso no pueden localizarse de una forma rápida, por tanto resulta más práctico utilizar el cálculo puramente vectorial para obtener la velocidad y aceleración pedidas.

La velocidad del punto P se obtiene como resultado del producto vectorial (ver expresión 27):

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_C$$

donde: $\vec{\omega}$ su módulo es conocido, $\omega = 12\, rad/s$

la dirección de la velocidad angular es la del eje de rotación, la misma que la del vector unitario $\vec{u}_{EA}$.

en cuanto al sentido, el enunciado menciona que el giro es en sentido horario observado desde el punto E. En la Figura 2 se muestra el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ y el unitario $\vec{u}_{EA}$ con su misma dirección y sentido.

$$\vec{u}_{EA} = \frac{\overrightarrow{EA}}{\overline{EA}} = \frac{(-0{,}4,\, 0{,}4{,}0{,}2)}{\sqrt{0{,}4^2 + 0{,}4^2 + 0{,}2^2}} = \frac{(-0{,}4,\, 0{,}4{,}0{,}2)}{0{,}6} = \frac{(-2,\, 2{,}1)}{3}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_{EA} = 12 \cdot \frac{(-2,\, 2{,}1)}{3} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$\vec{r}_P$ es el vector que posiciona el punto P respecto del eje de rotación, (debe tener su origen en un punto cualquiera del eje, y su extremo en el propio punto P). Existen dos opciones sencillas: con origen en el punto A $\rightarrow \vec{r}_C = \overrightarrow{AC}$

con origen en el punto E $\rightarrow \vec{r}_C = \overrightarrow{EC}$

Ambas son muy convenientes, se elige la primera opción

$$\overrightarrow{AC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}25 \\ -0{,}2 \end{Bmatrix}$$

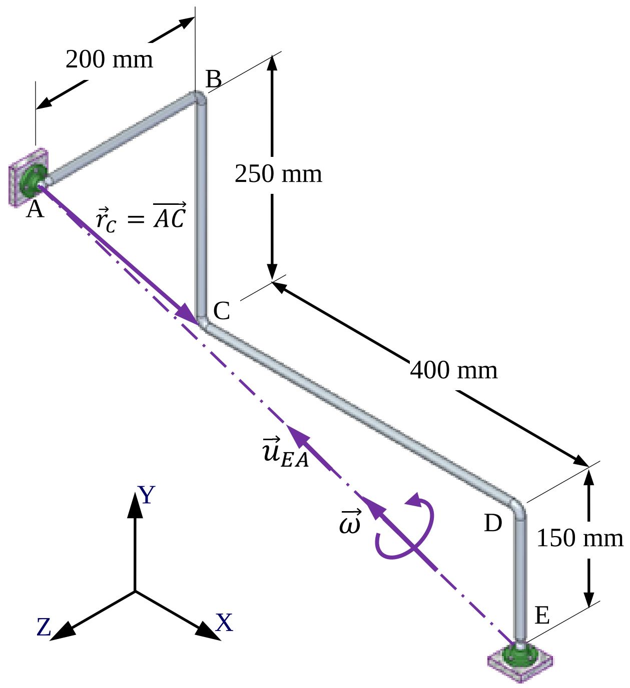

Figura 2

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 8 & 4 \\ 0 & -0{,}25 & -0{,}2 \end{vmatrix} \; ; \qquad \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} -0{,}6 \\ -1{,}6 \\ 2 \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]}$$

Para calcular la aceleración se utiliza la expresión:

$$\vec{a}_C = \overbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}_C}^{a_{tangencial}} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_C)}^{a_{normal}}$$

Primero se obtiene el vector aceleración angular, como el enunciado dice que la velocidad disminuye el sentido de la aceleración es contrario al de la velocidad angular:

$$\vec{\alpha} = \alpha \cdot (-\vec{u}_{EA}) = 60 \cdot \frac{(2,-2,-1)}{3} = \begin{Bmatrix} 40 \\ -40 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 40 & -40 & -20 \\ 0 & -0{,}25 & -0{,}2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & 8 & 4 \\ -0{,}6 & -1{,}6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 25{,}4 \\ 21{,}6 \\ 7{,}6 \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]$$

Conclusión

En el ejercicio 2 se planteaba la posibilidad de 3 formas de resolución mientras que en este caso sólo se propone una, la primera, que se basa en el conocimiento de un punto cualquiera del eje de rotación.

Las otras dos formas, así como una representación gráfica, no son útiles ya que se basan en el conocimiento del centro de curvatura de la trayectoria. En este caso este centro no es de localización inmediata, razón por la que se desestiman.

A pesar de lo dicho en el párrafo anterior se ofrece el vídeo del movimiento que muestra las trayectorias y centros de curvatura de algunos puntos para reafirmar la idea de que para un sólido rígido en rotación pura *todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran alineados en una recta perpendicular a cada una de las trayectorias denominada eje de rotación.*