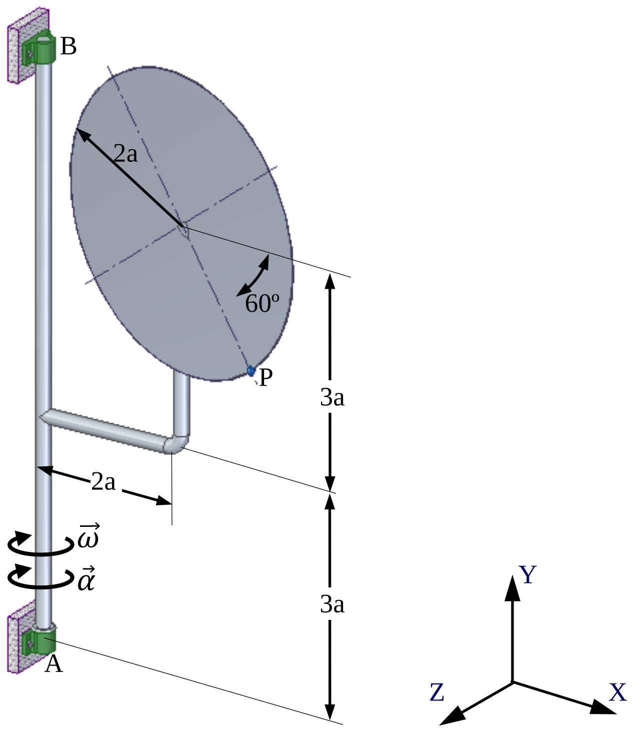
Planteamiento

El disco de la figura está soldado a la barra acodada y ésta lo está a su vez a la barra AB. El conjunto gira con una velocidad angular ω rad/s y una aceleración angular α rad/s^2. Calcular la velocidad y la aceleración del punto P.



Resolución

Para calcular la velocidad y aceleración del punto P debemos saber:

a) a qué elemento o sólido rígido pertenece.

b) qué tipo de movimiento tiene dicho elemento.

a) Como puede apreciarse en el vídeo, tanto el eje como la barra acodada y el disco están soldados entre sí, por lo que definen un sólido rígido que en adelante denominaremos eje-barra-disco y al cual pertenece el punto P.

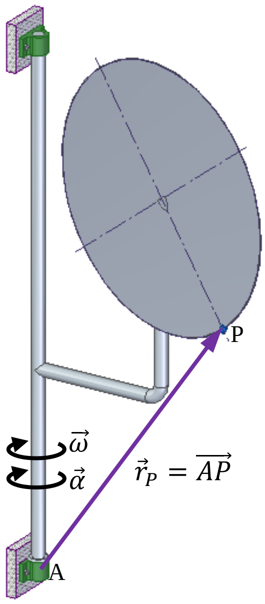
b) *un sólido rígido realiza un movimiento de rotación pura cuando todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran alineados en una recta perpendicular a cada una de las trayectorias denominada eje de rotación.*

En este caso todos los puntos de eje-barra-disco describen trayectorias circulares con centro en la línea AB (observar en el vídeo la trayectoria del punto P), por tanto se trata de un movimiento de rotación pura en torno al eje AB con una velocidad y aceleraciones angulares conocidas.

A partir de aquí se plantean varias formas de resolver según se utilicen unas u otras expresiones de las propuestas en el apartado 3.3 de la teoría.

1ª Forma

Cálculo vectorial, utilizando un vector posición con origen en el apoyo A, punto al cual están referidas las cotas.



La velocidad del punto P se obtiene como resultado del siguiente producto vectorial (ver expresión 27):

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$

donde: $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del sólido al cual pertenece el punto P; en este caso gira siguiendo el sentido negativo del eje Z.

$\vec{r}_P$ es el vector que posiciona el punto P respecto del eje de rotación, (debe tener su origen en un punto cualquiera del eje, y su extremo en el propio punto P).

De los múltiples opciones tomamos el origen en el punto A $\longrightarrow$ $\vec{r}_P = \overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = \begin{Bmatrix} 2a + 2\,a\cos 60° \\ 6a - 2a\,sen60° \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3a \\ 6a - \sqrt{3}a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 3a & 6a - \sqrt{3}a & 0 \end{vmatrix} \; ; \qquad \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\omega \end{Bmatrix} [\text{m/s}]}$$

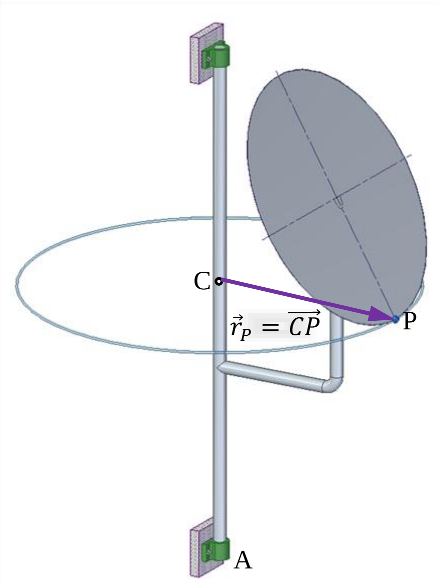
La aceleración del punto P puede obtenerse como la suma de la aceleración tangencial y la aceleración normal (ver expresión 28):

$$\vec{a}_P = \overbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P}^{a_{tangencial}} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P)}^{a_{normal}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 3a & 6a - \sqrt{3}a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 3a\omega \end{vmatrix}$$

Observar que el producto vectorial $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP})$ ha sido ya calculado y coincide con el valor $\vec{v}_P$

$$\boxed{\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} [\text{m/s}^2]}$$



2ª Forma

Cálculo vectorial, utilizando un vector posición con origen en el centro de curvatura de la trayectoria.

Tal y como se ha mencionado, se puede tomar como origen del vector de posición cualquier punto del eje; por ello en este caso se elige el que parte del centro de curvatura de la trayectoria del punto P, esto decir un vector que partiendo del punto C termina en P. Así, ahora tenemos $\rightarrow$ $\vec{r}_P = \overrightarrow{CP}$.

$$\overrightarrow{CP} = \begin{Bmatrix} 3a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 3a & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\omega \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]$$

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 3a & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 3a\omega \end{vmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s^2}]$$

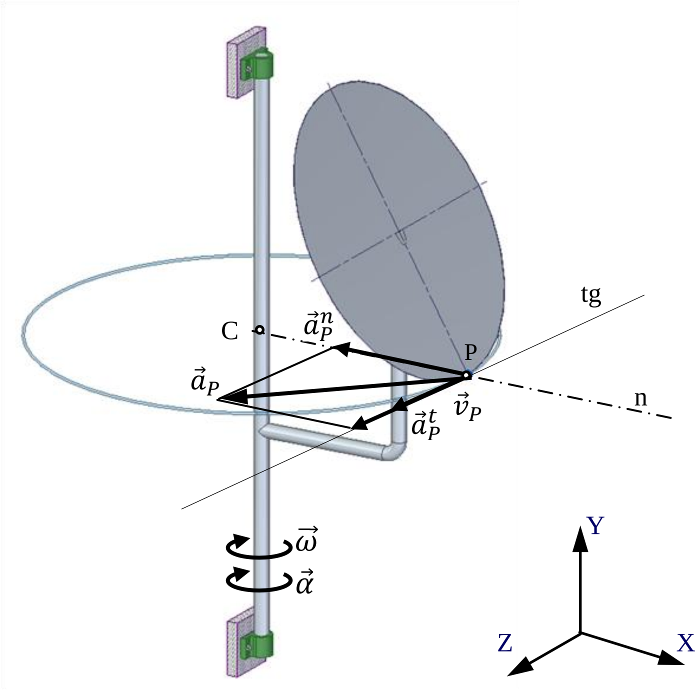
En el caso de conocer el centro de la circunferencia trayectoria, punto C, en lugar del doble producto vectorial $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP})$ se puede utilizar una expresión simplificada para el cálculo de la aceleración normal, esta ecuación se obtiene al expresar la aceleración normal como un vector de módulo $\omega^2 \cdot R$ dirigido hacia el centro de la circunferencia trayectoria, es decir, con la misma dirección y sentido opuesto a las del vector $\overrightarrow{CP}$.

$$\vec{a}_P^n = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{CP} = -\omega^2 \cdot \begin{Bmatrix} 3a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Representación gráfica

En la siguiente figura, se han representado los vectores correspondientes a la velocidad y a las aceleraciones y pueden apreciarse las siguientes direcciones:

- La velocidad y aceleración tangencial del punto P, son tangentes a su trayectoria.
- La aceleración normal de P, es normal a la trayectoria, hacia el centro de curvatura.



Representación gráfica de la velocidad y aceleraciones del punto P

3ª Forma

Cálculo escalar, utilizando la definición de los vectores velocidad y aceleración, es decir, definiendo su módulo, dirección y sentido.

Velocidad del punto P:

- Módulo: $v_P = R \cdot \omega$, donde R es el radio de la circunferencia trayectoria,

$$v_P = R \cdot \omega = 3a \cdot \omega$$

- Dirección: tangente a la circunferencia trayectoria, dirección según eje Z (componente en $\vec{k}$)
- Sentido: el del movimiento, hacia las Z positivas (+)

$$\vec{v}_P = 3a\omega\,\vec{k} \quad ; \quad \boxed{\vec{v}_P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\omega \end{Bmatrix} [\mathrm{m/s}]}$$

Aceleración tangencial del punto P:

- Módulo: $a_P^t = R \cdot \alpha$
- Dirección: la misma que la velocidad, ambas son tangentes (componente en $\vec{k}$)
- Sentido: el del movimiento, en el sentido del eje Z (+)

$$\vec{a}_P^t = 3a\alpha\,\vec{k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

La aceleración normal del punto P:

Módulo:

$$\vec{a}_P^n = \omega^2 \cdot R = 3a\omega^2 [m/s^2]$$

- Dirección y sentido hacia el centro de curvatura de la trayectoria, en el sentido negativo del eje X $(-)$

$$\vec{a}_P^n = -3a\omega^2 \vec{\imath} = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

Por tanto la aceleración total:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^t + \vec{a}_P^n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \; ; \quad \boxed{\vec{a}_P = \begin{Bmatrix} -3a\omega^2 \\ 0 \\ 3a\alpha \end{Bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

Conclusión

En este caso hemos resuelto el problema planteado de tres maneras diferentes:

La primera forma se basa en que, además de la posición del punto cuya velocidad y/o aceleración se desean calcular, se conoce la posición de un punto, cualquiera, perteneciente al eje de rotación. Esta situación se dará siempre.

Por el contrario, tanto la segunda como la tercera forma de resolución se basan en la utilización del centro de curvatura de la trayectoria. En los casos en los que la localización de dicho punto no sea inmediata, estos métodos son poco aconsejables.