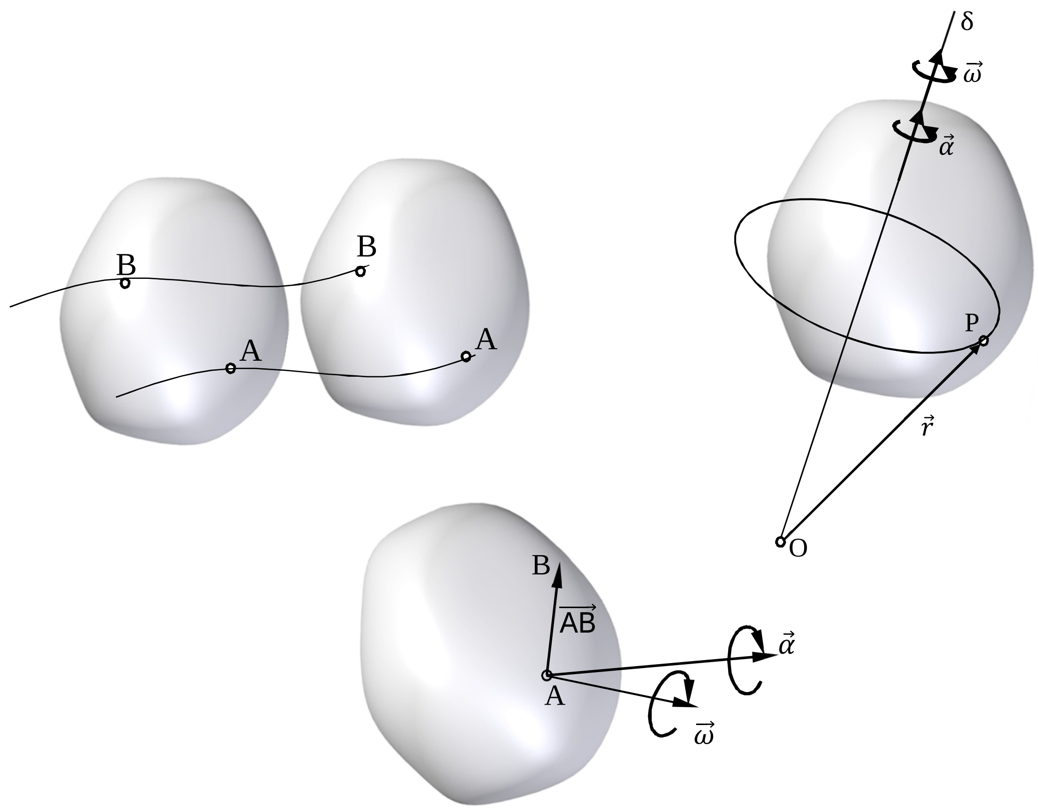
Cinemática del sólido rígido

Teoría básica para el curso

Cinemática del sólido rígido, ejercicios comentados



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

ÍNDICE DE CONTENIDOS

4. MOVIMIENTO RELATIVO

4.1. Movimiento relativo de un punto respecto a un sistema de referencia en traslación

Se definen un sistema de referencia fijo OXYZ, un sistema móvil que se traslada O´X´Y´Z´ y un punto P se mueve dentro del sistema móvil, ver Figura 23.

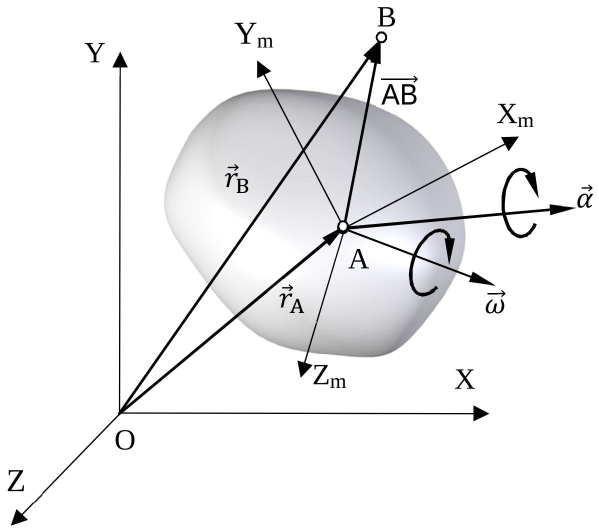


Figura 1

Dados:

$\vec{r}_P$: posición del punto P respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_A$: posición del punto A respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_P{}´$: posición del punto P respecto del sistema móvil.

En la Figura 23 se observa que:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P{}´ \tag{49}$$

El campo de velocidades se obtiene derivando la expresión (49) respecto el sistema fijo:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P{}´}{dt}\right)_{XYZ} \tag{50}$$

Analizando los términos de la expresión (50):

$\vec{r}_P$ y $\vec{r}_A$ están referidos al sistema fijo y sus derivadas son:

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ velocidad absoluta del punto P. La velocidad absoluta se define siempre respecto al sistema fijo.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ velocidad de traslación del sistema móvil, es la velocidad que tendría el punto P si estuviera rígidamente unido al sistema O´X´Y´Z´. Este término representa la velocidad de arrastre del punto P.

$\vec{r}_P{}'$ está situado en el sistema móvil en translación y por lo tanto se cumple que:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = \vec{v}_P{}'$$

⇨ representa la <u>velocidad relativa</u> del punto P, respecto al sistema móvil. Es la velocidad del punto P que percibe un observador situado en el sistema móvil.

Y llevando estos resultados a la expresión (50), se obtiene que:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{P}}{}' \qquad (51)$$

El campo de aceleraciones se obtiene derivando la expresión del campo de velocidades (51), y se obtiene que:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{P}}{}' \qquad (52)$$

Al analizar las expresiones (51) y (52) puede concluirse que el <u>movimiento absoluto</u> de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que a su vez se traslada, puede estudiarse como la superposición de dos movimientos:

- Un movimiento de **arrastre:** es el movimiento que tendría el punto, si estuviese soldado al sistema de referencia que se traslada. Como es lógico, coincide con el movimiento del sistema móvil respecto del fijo. Este término indica la velocidad y/o aceleración que tiene el punto por estar en un sistema en movimiento.
- Un movimiento **relativo:** es el movimiento que tiene el punto para un observador situado en el sistema móvil.

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{P}} \\ \vec{a}_{\mathrm{P}}\end{matrix}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{A}} \\ \vec{a}_{\mathrm{A}}\end{matrix}} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{P}}{}' \\ \vec{a}_{\mathrm{P}}{}'\end{matrix}}$$

⇩ Movimiento **absoluto** ⇩ Movimiento **arrastre** ⇩ Movimiento **relativo**

4.2. <u>Movimiento relativo general de un punto respecto a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis</u>

En el párrafo anterior se ha estudiado el movimiento de un punto P situado en un sistema en translación; en este apartado se estudiará el caso general en el cual el sistema móvil puede, además de trasladarse, girar.

En la Figura 24, se definen un sistema de referencia fijo OXYZ, un sistema de referencia móvil O´X´Y´Z´ que se traslada con $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ y $\vec{a}_{\mathrm{A}}$ y gira con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ y por último un punto P se mueve dentro del sistema móvil.

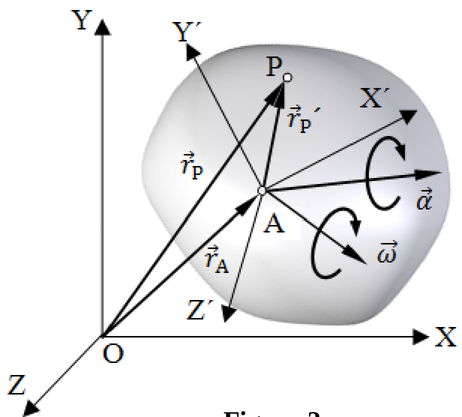


Figura 2

Se definen los siguientes vectores:

$\vec{r}_P$: posición del punto B respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_A$: posición del punto A respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_P´$: posición del punto B respecto del sistema móvil.

Al igual que en apartado anterior, en la Figura 24 se observa que:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P´ \tag{53}$$

El campo de velocidades se obtiene derivando la expresión (53) respecto del sistema fijo.

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{XYZ} \tag{54}$$

Al igual que ocurría en el caso anterior, $\vec{r}_P$ y $\vec{r}_A$están referidos al sistema fijo y por lo tanto se derivan directamente, sin embargo $\vec{r}_P´$está referido al sistema móvil por lo que habrá que aplicar la ley de Boure para obtener su derivada.

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ velocidad absoluta del punto P, respecto al sistema fijo.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ velocidad de traslación del sistema móvil.

$\left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{X´Y´Z´} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´ = \vec{v}_P´ + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´$ ⇨ donde se ha tenido en cuenta que el término $\left(\frac{d\vec{r}_P´}{dt}\right)_{X´Y´Z´}$ representa lavelocidad relativa de P respecto al sistema móvil.

Llevando estos resultados a la expresión (54):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_P´ + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´ \tag{55}$$

Y reordenando los términos:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P´}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_P´}_{v_{relativa}} \tag{56}$$

La velocidad absoluta de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que además de trasladarse, rota, puede estudiarse como la suma de dos velocidades:

- Una velocidad de **arrastre:** es el movimiento que tendría el punto, si estuviese soldado al sistema de referencia móvil. En este supuesto, el sistema y el punto se mueven solidariamente, como si se tratase de un sólido rígido con un movimiento general, definido por las magnitudes cinemáticas atribuidas en un comienzo al sistema móvil: $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$. Recordando la conclusión obtenida del estudio del campo de velocidades de un sólido rígido (46), el movimiento del punto P puede estudiarse como la superposición de la traslación de un punto de referencia del mismo sólido, en este caso punto A, origen del sistema de referencia, y una rotación del punto P alrededor del eje que pasa por dicho punto de referencia.
- Una velocidad **relativa:** es la velocidad que tiene el punto P para un observador situado en el sistema móvil. Es evidente que este término es la derivada del vector de posición definido en el sistema de referencia móvil, respecto del propio sistema móvil.

El campo de aceleraciones se obtiene derivando la expresión (55) respecto del sistema fijo:

$$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (57)$$

Analizando cada uno de estos términos:

$$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_P$$ ⇨ aceleración absoluta del punto P, respecto al sistema fijo

$$\left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_A$$ ⇨ aceleración de traslación del sistema móvil.

$$\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' = \vec{a}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$$ ⇨ donde se ha tenido en cuenta que el término $\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'}$ representa la aceleración relativa de P respecto al sistema móvil.

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' = \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}^{=0}\right] \wedge \vec{r}_P{}' = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}'$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \left[\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'\right] = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')$$

Sustituyendo en la ecuación (55):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}') \qquad (58)$$

Y reordenando los términos:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P{}'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}'}_{a_{Coriolis}} \qquad (59)$$

La aceleración absoluta de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que además de trasladarse, rota, puede estudiarse como la suma de tres aceleraciones:

- Una aceleración de **arrastre:** es la aceleración del punto considerándolo parte de un sólido soldado al sistema de referencia móvil cuyo movimiento general está definido por las magnitudes cinemáticas $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$.
- Una aceleración **relativa:** es la aceleración que tiene el punto P para un observador situado en el sistema móvil.
- Una aceleración de **Coriolis**: Es un término que aparece las magnitudes vectoriales aplicando la ley de Boure.

Analizando las expresiones (56) y (59) puede obtenerse el siguiente paralelismo, similar al que se ha obtenido para las expresiones (51) y (52):

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{v}_P \\ \vec{a}_P\end{matrix}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}' \\ \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')\end{matrix}} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_P{}' \\ \vec{a}_P{}'\end{matrix}} \begin{matrix} \\ + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} \\ 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}'\end{matrix}}$$

Movimiento **absoluto**	Movimiento de **arrastre**	Movimiento **relativo**	Aceleración de **Coriolis**

A continuación va a utilizarse un sencillo ejemplo para ilustrar los conceptos de movimiento absoluto, de arrastre y relativo. En la Figura 25, se presenta un mecanismo sencillo formado por un casquillo que desliza a lo largo de la barra AB con velocidad y aceleración $\vec{v}_{P/AB}$ y $\vec{a}_{P/AB}$ al mismo tiempo que la barra AB gira con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$.

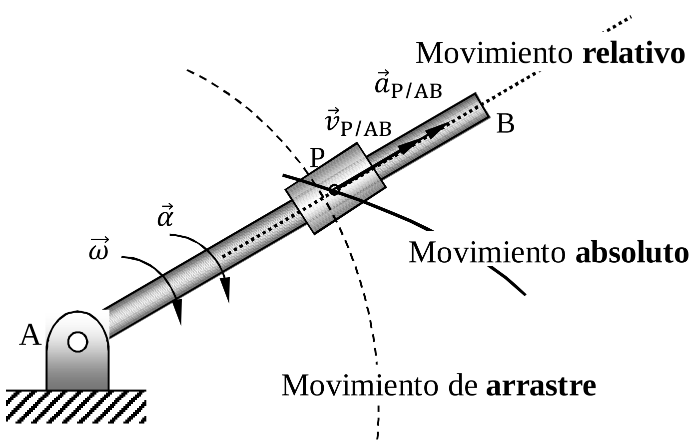


Figura 3

El movimiento de **arrastre** del punto P es el que tiene dicho punto debido estar definido en un sistema que se mueve respecto del sistema de referencia fijo.

En el ejemplo, el punto P del casquillo está obligado a moverse sobre la barra que está girando, el movimiento de arrastre es el que tendría el punto P si perteneciera a la barra, describiría una trayectoria circular con centro en A.

El movimiento **relativo** del punto P es el que percibe un observador situado en el sistema móvil. Es el movimiento que queda al anular el inmovilizar del sistema móvil.

En el ejemplo, el sistema móvil está definido por la barra AB y por lo tanto el movimiento relativo es el observado desde ésta sin tener en cuenta su giro. Es el deslizamiento del casquillo respecto de la barra y como es lógico tendrá la dirección de ésta.

Por último el movimiento absoluto del punto P es el observado desde un sistema de referencia fijo, superposición de los dos anteriores.

En el ejemplo, para un observador situado en el suelo, el punto P describe una trayectoria curva con radio de curvatura variable.

4.3. Movimiento relativo entre dos sólidos

En los apartados anteriores se ha estudiado el movimiento de un punto situado en sistemas se trasladan y/o rotan; el objetivo de este apartado es analizar el movimiento general de un sólido rígido respecto de un sistema móvil que puede trasladarse y/o rotar.

En este caso se definen el sistema de referencia fijo *OXYZ* y dos sólidos rígidos S_1y S_2con movimientos generales independientes, ligados respectivamente a los sistemas móviles $AX_1Y_1Z_1$, que se traslada con $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$ y gira con $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$ y $BX_2Y_2Z_2$ que se traslada con $\vec{v}_B$ y $\vec{a}_B$ y gira con $\vec{\omega}_2$ y $\vec{\alpha}_2$.

A continuación se definen los campos de velocidades y aceleraciones de un punto arbitrario P que se mueve dentro del sistema móvil S_2.

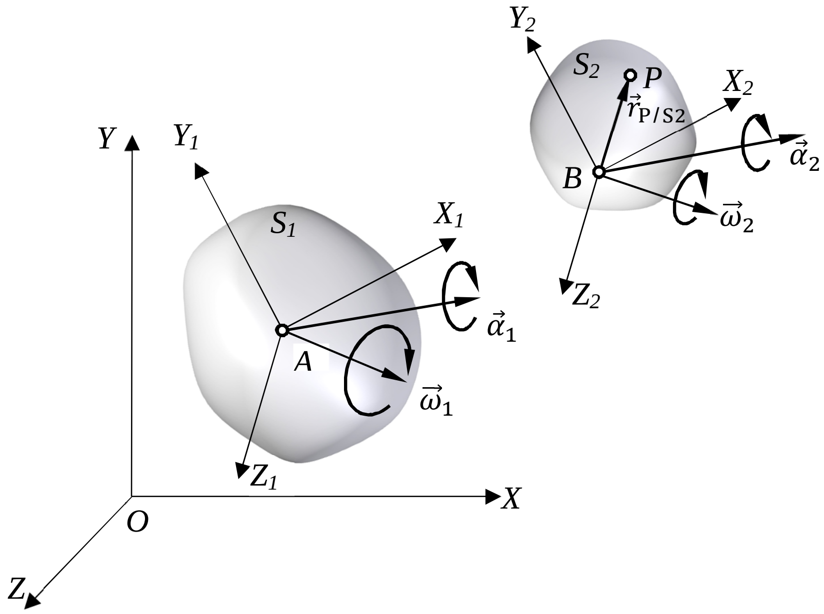


Figura 4

4.3.1. Campo de velocidades relativas a S_1:

Partiendo de la relación de velocidades entre los puntos B y P del sólido S_2 que se mueve con movimiento general, se obtiene:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{60}$$

Por otro lado, las velocidades de los puntos P y B pueden plantearse desde el sistema S_1, descomponiéndolas en sendos términos de arrastre relativos:

$$\underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AP}}_{v_{Parrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S1}}_{v_{Prelativa}} = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB}}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{B/S1}}_{v_{relativa}} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{61}$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ y sustituyéndolo en la expresión anterior (61):

$$\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{62}$$

Simplificando:

$$\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \tag{63}$$

Y finalmente se obtiene que:

$$\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge \overrightarrow{BP} \tag{64}$$

Puesto que la expresión anterior define el campo de velocidades del movimiento general de S_2referido al sistema S_1, es evidente que el término $(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$ es la velocidad de S_2 respecto de S_1, es decir:

$$\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \tag{65}$$

Y queda demostrado que la velocidad angular absoluta del sistema S_2, la observada desde el sistema fijo, es la suma de la velocidad angular de arrastre la velocidad angular relativa.

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} \tag{66}$$

Por último, puede concluirse que la expresión del **campo de velocidades relativas** es similar al de las velocidades absolutas, refiriendo todos los términos al sistema móvil S_1 en lugar de al sistema fijo.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \tag{67}$$

4.3.2. Campo de aceleraciones relativas a S_1:

Para el estudio de las aceleraciones es necesario derivar la expresión obtenida para el campo de velocidades respecto de S_1 (64). Para derivar correctamente el vector $\overrightarrow{BP}$ respecto de S_1, es necesario aplicar la ley Boure, teniendo en cuenta que respecto el sistema S_1, dicho vector está girando con $\vec{\omega}_{2/1}$.

$$\left(\frac{d\vec{v}_{P/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} = \left(\frac{d\vec{v}_{B/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \left[\overbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{BP}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2}}^{=0} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}\right] \qquad (68)$$

Y puede observarse que, análogamente a lo concluido para el campo de velocidades relativas, <u>la expresión obtenida para el **campo de aceleraciones relativas** es similar al de las aceleraciones absolutas refiriendo todos los términos al sistema móvil S_1 en lugar de al sistema fijo</u>:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P/S1} = \vec{\alpha}_{B/S1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \qquad (69)$$

- ⇨ Puede concluirse que los <u>campos de velocidades y aceleraciones relativas</u> son consecuencia del movimiento general del S_2 visto desde el sistema S_1 y por lo tanto <u>pueden obtenerse sumando a la traslación del punto B, la rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto</u>.

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{P/S1}\\ \vec{a}_{P/S1}\end{matrix}} \begin{matrix}=\\=\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{B/S1}\\ \vec{a}_{B/S1}\end{matrix}} \begin{matrix}+\\+\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}\\ \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}\end{matrix}}$$

⇩	⇩	⇩
Movimiento **relativo a S_1**	Traslación de B	Rotación alrededor de B

4.3.3. <u>Cálculo de la aceleración angular absoluta de un sólido rígido</u>

En el apartado anterior se ha demostrado que partiendo del <u>movimiento relativo entre dos sólidos, puede obtenerse la siguiente relación entre las velocidades angulares absolutas</u>:

$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1}} \qquad (70)$$

Derivando esta expresión:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (71)$$

Para derivar correctamente la expresión (71), debe tenerse en cuenta que los vectores $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ definen las velocidades angulares respecto del sistema fijo y que por lo tanto su derivada es directa. Sin embargo, el término $\vec{\omega}_{2/1}$ indica la velocidad angular relativa del S_1 respecto S_2, está referida al sistema S_1que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}_1$ y por lo tanto debe derivarse aplicando la ley de Boure:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} \tag{72}$$

Sustituimos ahora el valor de $\vec{\omega}_{2/1}$obtenido en la expresión (70), se obtiene la siguiente expresión, en la que,$\vec{\alpha}_{2/1}$indica la aceleración relativa del S_2 respecto del S_1:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \tag{73}$$

Y operando se obtiene la expresión que relaciona las aceleraciones absolutas de los dos sólidos. El término $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$ se denomina aceleración complementaria de Resal:

$$\boxed{\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2} \tag{74}$$