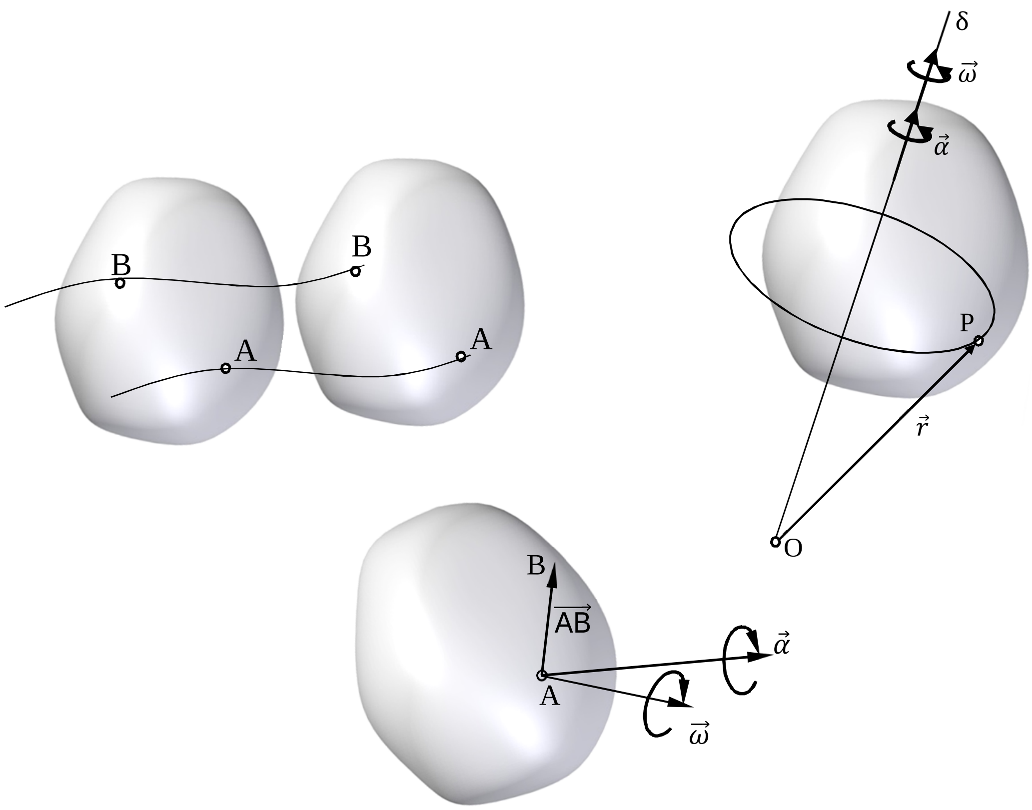
Cinemática del sólido rígido

Teoría básica para el curso
Cinemática del sólido rígido, ejercicios comentados



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

ÍNDICE DE CONTENIDOS

3.4. Derivada temporal de un vector respecto de sistemas móviles. Ley de Boure.

A la hora de derivar un vector cualquiera $\vec{r}$ es imprescindible indicar respecto de que sistema de referencia es observado. En principio las variaciones de dicho vector serán observadas de manera diferente desde una referencia fija o respecto de otro sistema en movimiento. Se pueden relacionar las derivadas temporales de un vector cualquiera respecto de dos sistemas de referencia mediante la ley de Boure.

Se comienza observando que ocurre al desarrollar la **derivada temporal de un vector definido en un sistema en traslación**.

Se definen los sistemas de referencia fijo (OXYZ) y el móvil (O´X´Y´Z´) que únicamente se traslada. El vector $\vec{r}$ se define en el sistema móvil. El objetivo es definir la relación entre las derivadas del vector en ambos sistemas de referencia.

La derivada temporal de un vector $\vec{r}$ respecto a un sistema fijo coincide con la derivada respecto a un sistema en translación.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} \qquad (39)$$

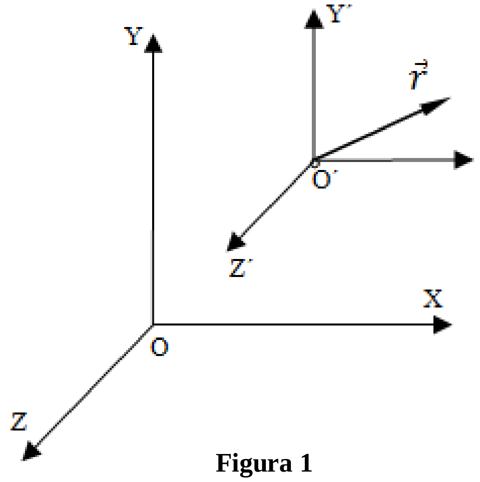


Figura 1

Ahora se observa un caso general como es la **derivada temporal de un vector respecto de un sistema en rotación.**

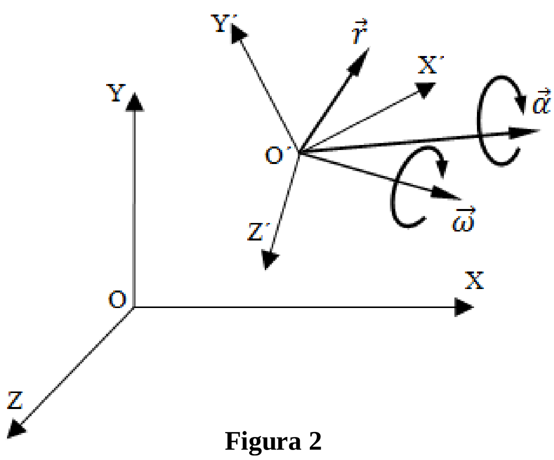


Figura 2

Se definen los sistemas de referencia fijo (OXYZ) y el móvil (O´X´Y´Z´) que rota con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$. Nuevamente se define el vector $\vec{r}$ en el sistema de referencia móvil.

La derivada temporal de un vector $\vec{r}$ respecto a un sistema fijo no coincide con la derivada respecto a un sistema en rotación. Para derivarlo deberemos aplicar la ley de Boure que se enuncia a continuación.

La deriva temporal de un vector $\vec{r}$ respecto de un sistema fijo es igual a la derivada del vector respecto del sistema móvil en rotación más el producto vectorial de $\vec{\omega}$, la velocidad angular del sistema móvil, por el vector en cuestión.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (1)$$

3.5. Movimiento general de un sólido rígido en el espacio

Hasta el momento se han definido la traslación y la rotación pura como movimientos elementales del sólido rígido. Se recuerda que en el caso de la traslación (Figura 16) todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración y por lo tanto pueden definirse una $\vec{v}$ y una $\vec{a}$ para el sólido.

En el caso de la rotación (Figura 17), pueden definirse una $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$, que son las que producen el cambio de orientación del sólido en el espacio.

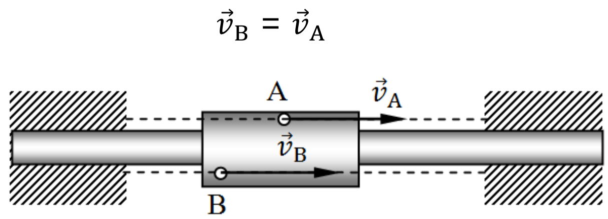


Figura 3

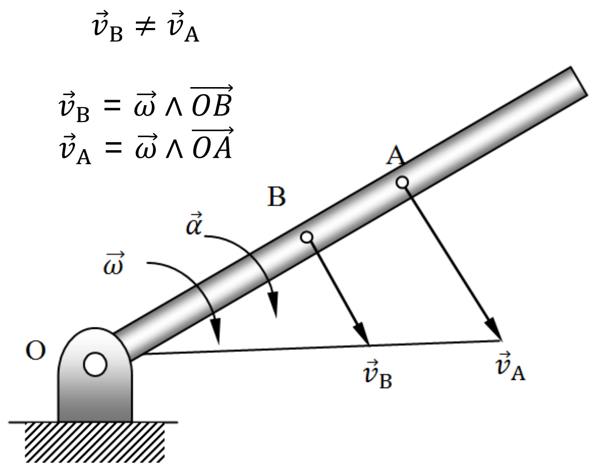


Figura 4

Si el movimiento de un sólido no se puede clasificar como uno de los dos movimientos particulares anteriores, traslación o rotación pura, se dice que se mueve con movimiento general.

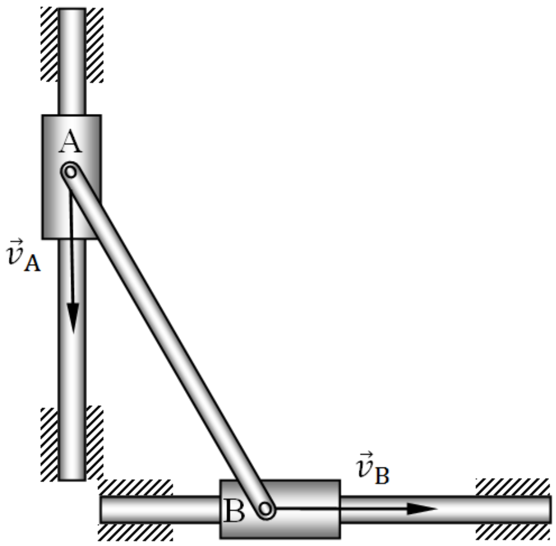


Figura 5

En el ejemplo de la Figura 5, la barra AB no tiene un movimiento de traslación ya que es evidente que los puntos A y B no tienen la misma velocidad y que la barra cambia de orientación en el movimiento. Sin embargo, tampoco se mueve con rotación pura ya que los puntos A y B no describen trayectorias circulares con eje común, por tanto puede deducirse que su movimiento es general.

Otro ejemplo de movimiento general, ahora en el espacio tridimensional, es el de una peonza, que puede girar en un punto fijo, variando la orientación del eje de rotación, o desplazarse, en cuyo caso el eje de rotación además de cambiar de orientación se desplaza. En cualquiera de estos casos, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ ya no tienen la misma dirección ya que se trata de un sólido con movimiento general.

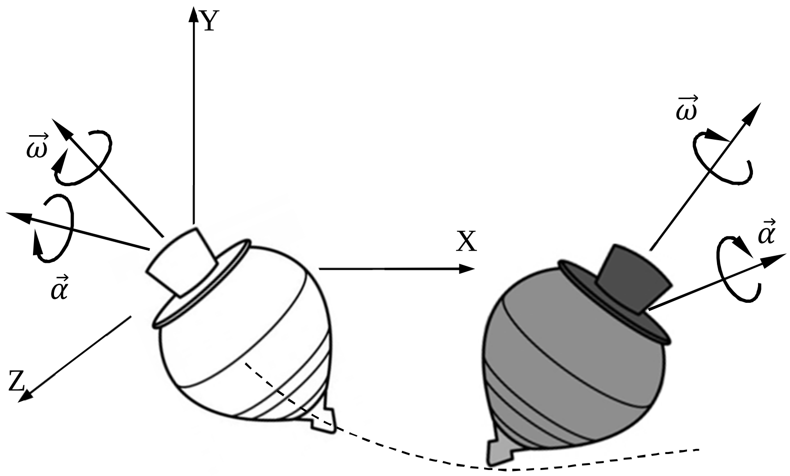


Figura 6

En este caso $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ tiene la dirección del eje instantáneo de rotación que será variable en el tiempo. Debido a la acción de $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ tanto el módulo de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ como su dirección varían; evidentemente la dirección de $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ ha de ser diferente a la de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ para poder modificar su dirección. Se puede establecer una analogía con la velocidad y aceleración lineales donde sabemos que la $\vec{\boldsymbol{v}}$ y la $\vec{\boldsymbol{a}}$ normalmente no tienen la misma dirección (en este caso, la aceleración tangencial a_t, modifica el módulo de la velocidad y a_n, de dirección diferente a v, la dirección).

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2}$$

3.6. <u>Campo de velocidades y de aceleraciones en el movimiento general</u>:

A continuación se determinará la relación que existe entre las velocidades de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido y posteriormente la relación entre las aceleraciones de estos mismos puntos.

En el espacio tridimensional de la Figura 7 definido por un sistema de referencia fijo OXYZ, un sólido rígido se mueve libremente. Se considera un sistema móvil O´X´Y´Z´ unido rígidamente al sólido, de manera que pueda identificarse dicho sistema el sólido estudiado.

Tanto los ejes como el sólido, unidos rígidamente, realizan el movimiento general que un sólido rígido puede tener en el espacio, es decir se trasladan y rotan con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$. Se observa que en el movimiento general $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ ya no tienen la misma dirección ya que, como se dijo cuando se estudió el movimiento elemental de rotación pura, esto solo ocurre cuando el eje de rotación es fijo.

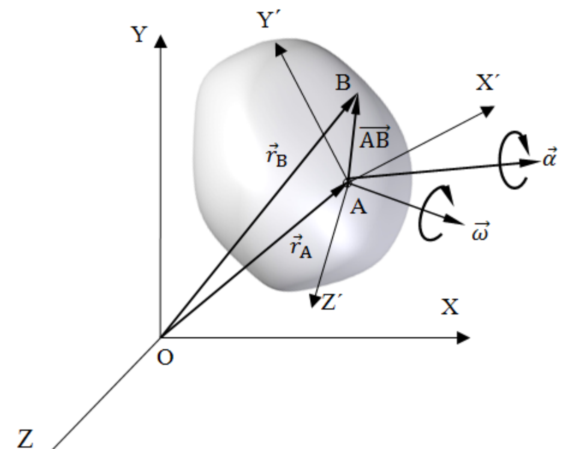


Figura 7

El estudio del movimiento general del sólido rígido, parte de definir el vector de /posición de un punto cualquiera perteneciente al sólido rígido y de derivarlo dos veces respecto del tiempo:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad (3)$$

El campo de velocidades del sólido rígido se obtiene a partir de la primera derivada de la expresión (42):

$$\left(\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \rightarrow \vec{v}_\mathrm{B} = \vec{v}_\mathrm{A} + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (43)$$

Puesto que el vector $\overrightarrow{AB}$ está situado en el sistema móvil, es decir en un sistema en rotación, es necesario aplicar la ley de Boure para obtener su derivada:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (44)$$

Como el vector $\overrightarrow{AB}$ une dos puntos del sólido rígido tiene un módulo constante y además no cambia su dirección visto desde el sistema móvil, se concluye que la derivada de dicho vector en el sistema móvil es nula, es decir que $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = 0$, por lo que:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (45)$$

Y por lo tanto se concluye que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_\mathrm{B} = \vec{v}_\mathrm{A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}} \qquad (46)$$

Analizando el resultado, puede afirmarse que es posible calcular la velocidad de un punto B del sólido sumando a la velocidad de un punto A arbitrario la velocidad debida a la rotación del punto B alrededor de dicho punto A.

El campo de aceleraciones del sólido se obtiene a partir de la segunda derivada de la expresión (42):

$$\left(\frac{d\vec{v}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \tag{47}$$

Y se obtiene:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)} \tag{48}$$

Se puede calcular la aceleración de un punto B cualquiera del sólido rígido como la suma de la aceleración de un punto A arbitrario la aceleración debida a la rotación del punto B alrededor de de dicho punto A.

Por lo según las expresiones (46) y (48) puede concluirse que la velocidad y/o aceleración de un punto B cualquiera del sólido puede calcularse como la suma de la velocidad y/o aceleración de un punto cualquiera A y la velocidad y/o aceleración debidas a la rotación del punto B alrededor de un eje que pasa por el punto A.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

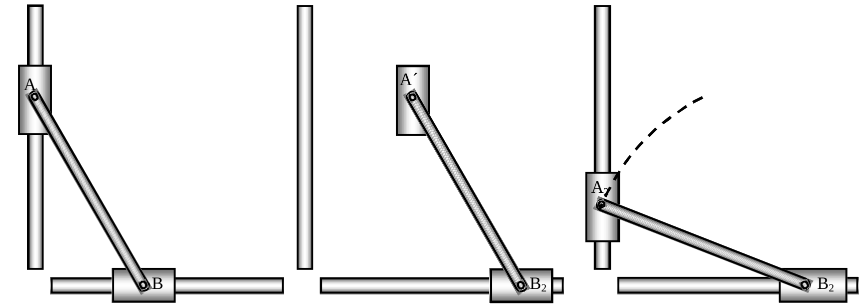
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB}}_{a_{tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}_{a_{normal}}$$

Traslación de A

Rotación de B alrededor de A

El cálculo realizado para el punto B puede extenderse a cualquier punto del sólido rígido, permitiendo extraer la siguiente conclusión:

⇨ El movimiento general un sólido rígido consiste en una traslación y una rotación simultáneas y por lo tanto puede expresarse en cada instante como la superposición de una traslación de un punto de referencia arbitrario y una rotación alrededor del eje que pasa por dicho punto de referencia.

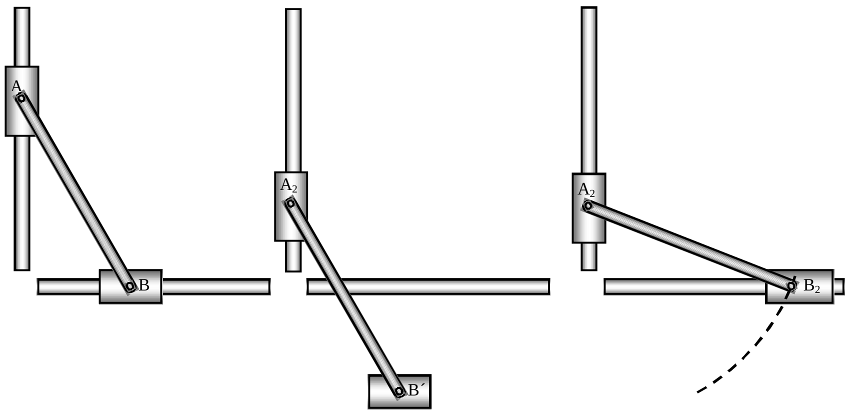


Movimiento general de la barra AB tomando como referencia el punto

1. posición inicial
2. la barra AB se traslada como lo hace el punto B
3. la barra AB rota alrededor del punto B

Figura 8

En las Figura 8 y la Figura 9se ha estudiado el movimiento general de la barra AB como la superposición de un movimiento de rotación y otro de traslación. En el primer caso se toma como referencia el punto B y en el segundo caso la referencia es el punto A. Es evidente que la barra no realiza estos movimientos de forma sucesiva pero también es cierto que se puede estudiar el movimiento como si así fuera.



Movimiento general de la barra AB tomando como referencia el punto A

1. posición inicial
2. la barra AB se traslada como lo hace el punto A
3. la barra AB rota alrededor del punto A

Figura 9

3.7. <u>Procedimiento de cálculo de velocidades y aceleraciones en el movimiento general</u>

Se pueden establecer los siguientes pasos para obtener las velocidades o aceleraciones de un sólido rígido que se mueve con movimiento general.

1. <u>Elección del sólido rígido con movimiento general</u>

   Tanto el punto del cual queremos calcular su velocidad o aceleración como el punto de referencia deben pertenecer al sólido elegido.

2. <u>Elección del punto de referencia</u>

   Cualquier punto es válido, de las infinitas combinaciones de traslación y rotación posibles se trata de buscar una que simplifique los cálculos. En el caso de que el sólido tenga un <u>punto fijo</u> es aconsejable tomarlo como punto de referencia. Si el sólido no tiene ningún punto fijo, debe elegirse <u>un punto cuya velocidad y/o aceleración sean conocidas o puedan calcularse fácilmente</u>.

3. <u>Estudiar el movimiento como la suma de una traslación una rotación</u>

   Tal y como se ha deducido en las expresiones (46) y (48) la velocidad y/o aceleración de un punto cualquiera puede obtenerse como la superposición de una traslación de un punto de referencia y una rotación alrededor de dicho punto. En el caso en que el sólido rígido tenga un punto fijo, el movimiento se reduce a una rotación ya que tomando como referencia dicho punto, la translación se anularía.