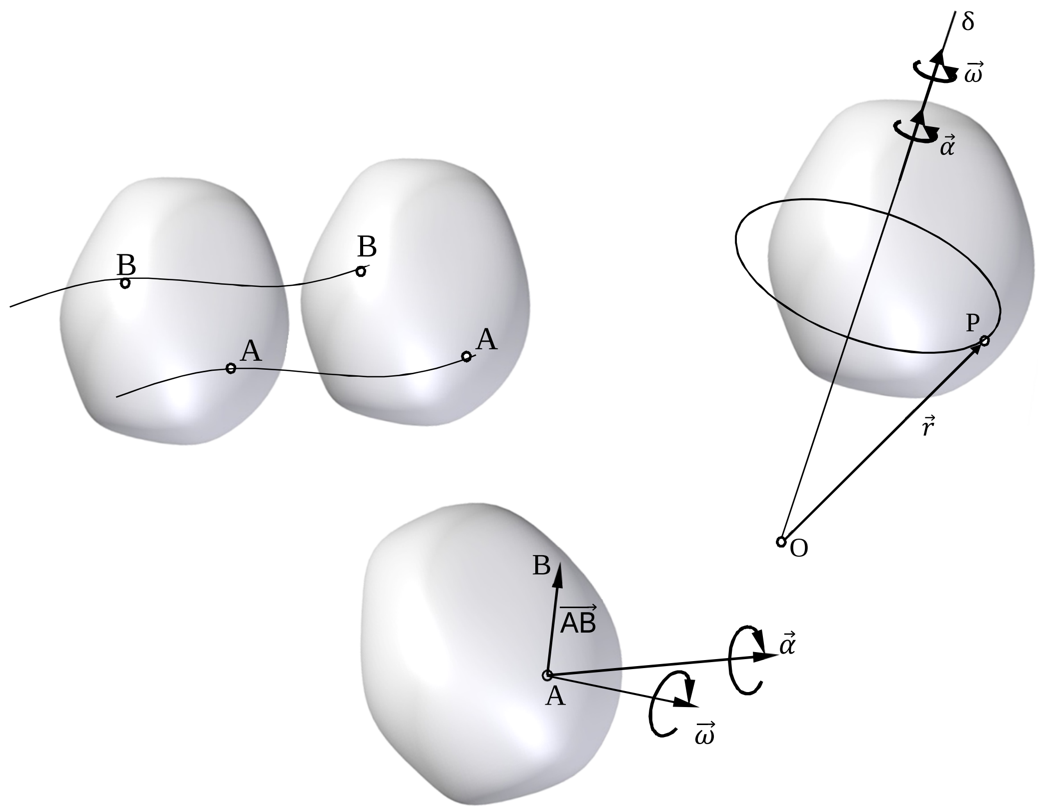
Cinemática del sólido rígido

Teoría básica para el curso *Cinemática del sólido rígido, ejercicios comentados*



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

ÍNDICE DE CONTENIDOS

3.3. Movimiento de rotación pura o rotación alrededor de un eje fijo

Se dice que un sólido tiene un movimiento de rotación pura cuando gira alrededor de un eje fijo.

⇨ Todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran alineados en una recta perpendicular a cada una de las trayectorias denominada eje de rotación. Los puntos situados sobre el eje de rotación tienen velocidad nula.

Para estudiar este tipo de movimiento comienza representándose un sólido rígido rotando alrededor del eje fijo δ, y definiendo las magnitudes vectoriales $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$, es decir la velocidad y aceleración angular del sólido.

Puesto que el sólido gira, su orientación cambia, y por lo tanto es necesario un parámetro que indique cómo de rápido gira, es decir un parámetro que exprese el ángulo girado por unidad de tiempo.

Siendo θ como el ángulo que gira el sólido en torno a su eje, pueden definirse la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$:

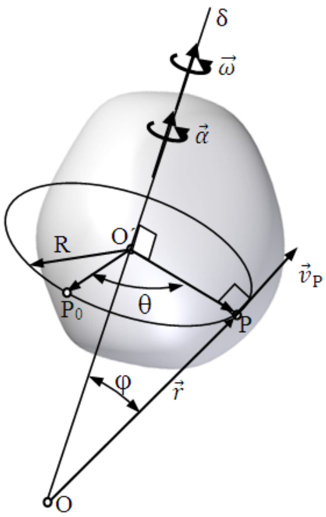


Figura 1

Velocidad angular del sólido rígido:

$\vec{\omega}$

- Módulo: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
- Dirección: perpendicular a la circunferencia trayectoria, pasando por su centro; coincide con la dirección del eje de rotación.
- Sentido: el del avance del sacacorchos al girar en el sentido del movimiento.
- Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación, ya que es un vector deslizante.

Aceleración angular del sólido rígido:

$\vec{\alpha}$

- Módulo: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt}$
- Dirección: perpendicular a la circunferencia trayectoria, pasando por su centro; coincide con la dirección del eje de rotación.
- Sentido: cuando $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{\omega}$ el sólido gira cada vez rápido; si $\vec{\alpha}$ tiene sentido opuesto a $\vec{\omega}$, el sólido está frenando. Ver Figura 10.

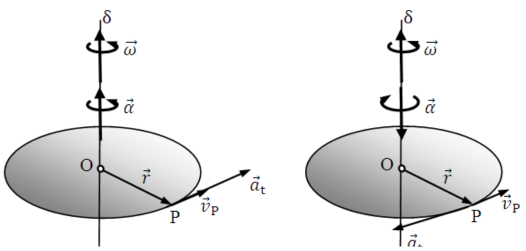


Figura 2

- Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación, ya que es un vector deslizante.

En este punto resulta interesante insistir en un par de ideas en torno a las dos magnitudes vectoriales definidas:

- Se puede hablar de una velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y una aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ que definen el movimiento de rotación pura del sólido rígido.
- $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ también caracterizan los movimientos circulares de cada uno de los puntos pertenecientes al sólido rígido. Así, podremos calcular la velocidad y la aceleración lineales de un punto cualquiera del sólido rígido considerando su movimiento circular en un plano perpendicular al eje de rotación.

<u>Aclaración</u>: $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ tienen la misma dirección por tratarse de una rotación alrededor de un eje fijo, el cual es un movimiento particular. Se verá más adelante que en el caso del movimiento general $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ pueden tener direcciones diferentes.

Supóngase que a continuación desean conocerse la <u>velocidad y aceleración lineales de un punto cualquiera P</u> del sólido que rota con una velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y una aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ alrededor de un eje fijo δ.

En la Figura 11 se han representado el eje de rotación y la trayectoria de un punto. Puede observarse, que el eje de rotación δ pasa por un punto O conocido y que el punto P describe una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje δ y con su centro O´ en dicho eje.

Para calcular la <u>velocidad del punto P</u> se parte de la expresión de la velocidad instantánea obtenida anteriormente:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t \qquad (1)$$

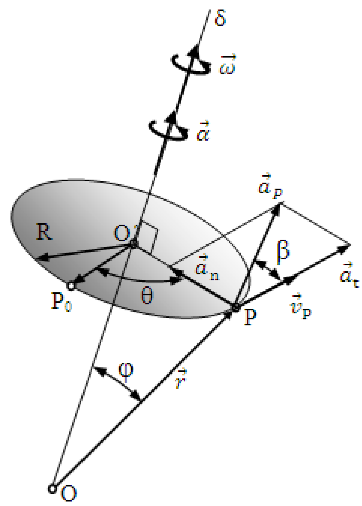


Figura 3

$\vec{v}_P$

· Módulo: Se sabe que $ds = Rd\theta$ y en la Figura 11 se observa $R = rsen\varphi$, por lo que,

$$v_P = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R \cdot \omega = rsen\varphi \cdot \omega$$

· Dirección: $\vec{u}_t$ tangente a la trayectoria, es decir, tangente a la circunferencia

· Sentido: el del movimiento

· Aplicada en el punto P

Por último, se comprueba que el vector $\vec{v}_P$ es el producto vectorial de la velocidad angular del sólido y el vector de posición del punto P respecto de cualquier punto que pertenezca al eje de rotación:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{2}$$

Para calcular la aceleración del punto P se deriva la velocidad respecto del tiempo. La expresión obtenida puede descomponerse en las denominadas componentes intrínsecas de la aceleración: la aceleración tangencial y la aceleración normal.

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}}_{a_{tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}_{a_{normal}} \tag{3}$$

La aceleración tangencial: $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ (29)

$\vec{a}_t$

- · Módulo: $a_t = \alpha \cdot rsen\varphi = R \cdot \alpha$ (30)
- · Dirección: tangente a la circunferencia trayectoria en el punto P
- · Sentido: el que origina α
- · Aplicada en el punto P

La aceleración normal: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ (31)

$\vec{a}_n$

- · Módulo: $a_n = \omega \cdot v_P \cdot sen90° = \omega \cdot R \cdot \omega = \omega^2 \cdot R$ (32)
- · Dirección: Normal a la trayectoria
- · Sentido: hacia el centro de la circunferencia descrita por el punto P
- · Aplicada en el punto P

En el caso de que se conozca el centro O´ de la circunferencia descrita por el punto, ambas componentes de la aceleración pueden calcularse escalarmente.

Por último, indicar que pueden calcularse el módulo de la aceleración y el ángulo β que forma la aceleración con la tangente:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \cdot \alpha^2 + R^2 \cdot \omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{4}$$

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t} \tag{5}$$

3.3.1. Movimiento circular en el plano

En el caso de que el movimineto circular se produzca en el plano XY, el camculo de velocidades y aceleraciones descrito en el apartado anterior puede simplicarse notablemente.

La circunferencia trayectoria, así como la velocidad y las aceleraciones están contenidas en el plano XY, y además la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ son perpendiculares a dicho plano, es decir, paralelas al eje Z.

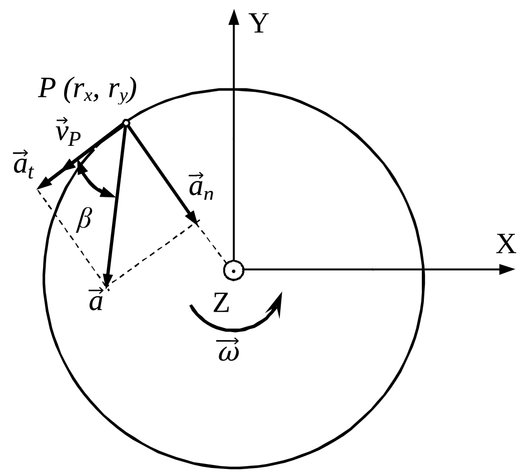


Figura 4

Para analizar la velocidad del punto P se parte de la expresión (27):

Velocidad del punto P: $\boldsymbol{\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}}$

$\vec{v}_P$
- · Módulo: como $\boldsymbol{\vec{\omega}}$ y $\boldsymbol{\vec{r}}$ son perpendiculares entre sí, $\boldsymbol{v_P = r \cdot sen90° \cdot \omega = \omega \cdot R}$ (35)
- · Dirección: tangente a la circunferencia, contenida en el plano XY.
- · Sentido: el del movimiento
- · Aplicada en el punto P

Para analizar la aceleración del punto P, se parte de la expresión de las aceleraciones intrínsecas obtenidas anteriormente en el caso general:

La aceleración tangencial: $\boldsymbol{\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}}$

$\vec{a}_t$
- · Módulo: $a_t = R \cdot \alpha$ (36)
- · Dirección: tangente a la circunferencia y contenida en el plano XY
- · Sentido: si α es positivo, el sentido de la velocidad; si α es negativo, el contrario.
- · Aplicada en el punto P

La aceleración normal: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$

$\vec{a}_n$
- Módulo: $a_n = \omega \cdot (\omega \cdot R) sen 90° = \omega^2 \cdot R$ (37)
- Dirección: perpendicular al plano definido por $\vec{\omega}$ y $\vec{v}_P$, en la dirección normal.
- Sentido: hacia el centro de la circunferencia.
- Aplicada en el punto P

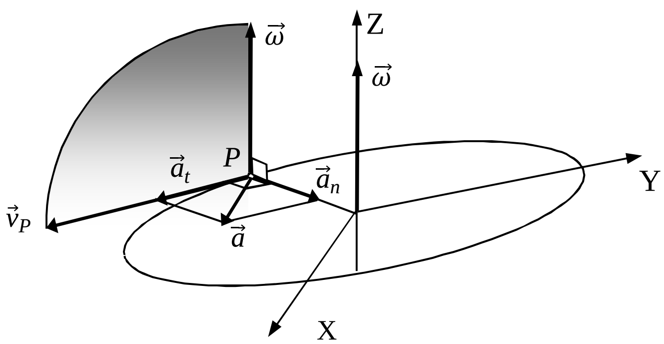


Figura 5

Otra forma de obtener la dirección y sentido de la aceleración normal es realizando analíticamente el producto vectorial que venimos trabajando $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot r_y & \omega \cdot r_x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \cdot r_x \vec{i} - \omega^2 \cdot r_y \vec{j} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

(38)

Puede concluirse que se trata de un vector de módulo $\omega^2 \cdot r$ y sentido el contrario al del vector de posición $\vec{r}$. Esta expresión, $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}$, simplica los cálculos y puede utilizarse siempre que las coordenadas del vector $\vec{r}$ sean sencillas de calcular (esto ocurre en el movimiento plano y algunos casos espaciales).