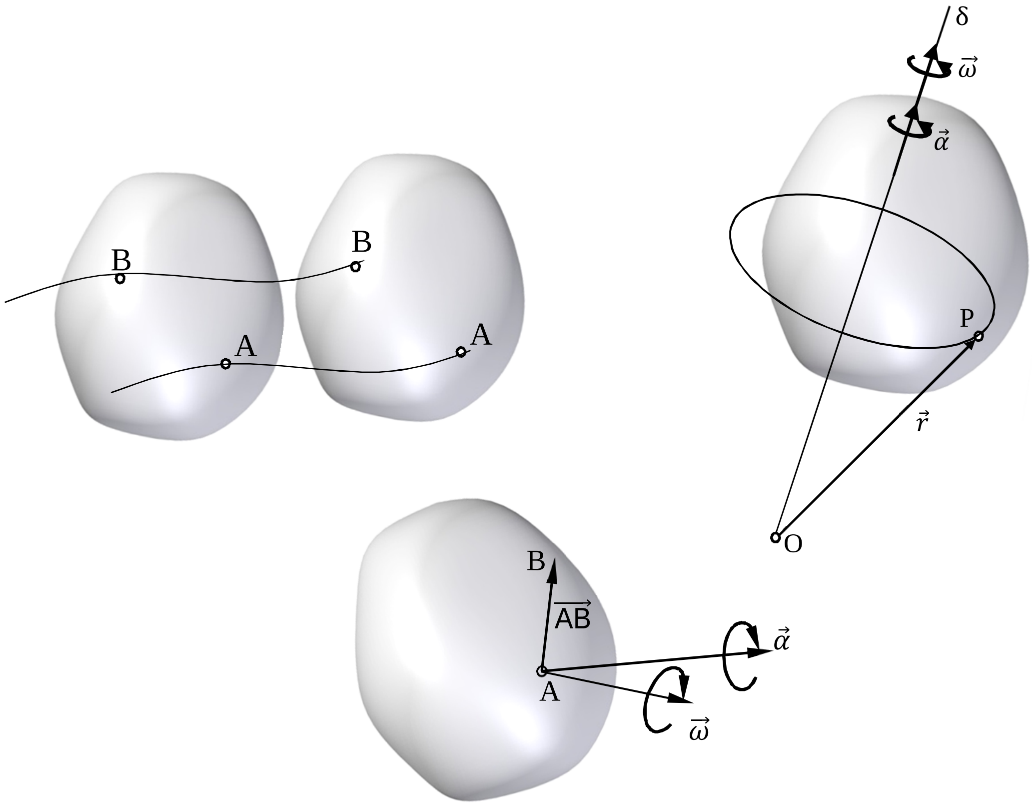
Cinemática del sólido rígido

Teoría básica para el curso

Cinemática del sólido rígido, ejercicios comentados



Ramírez López-Para, Pilar

Loizaga Garmendia, Maider

López Soto, Jaime

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Definición de Cinemática

El principal objetivo de este apartado es situar la cinemática dentro del ámbito de la mecánica, introduciendo los conceptos básicos relativos a la materia que se va a trabajar.

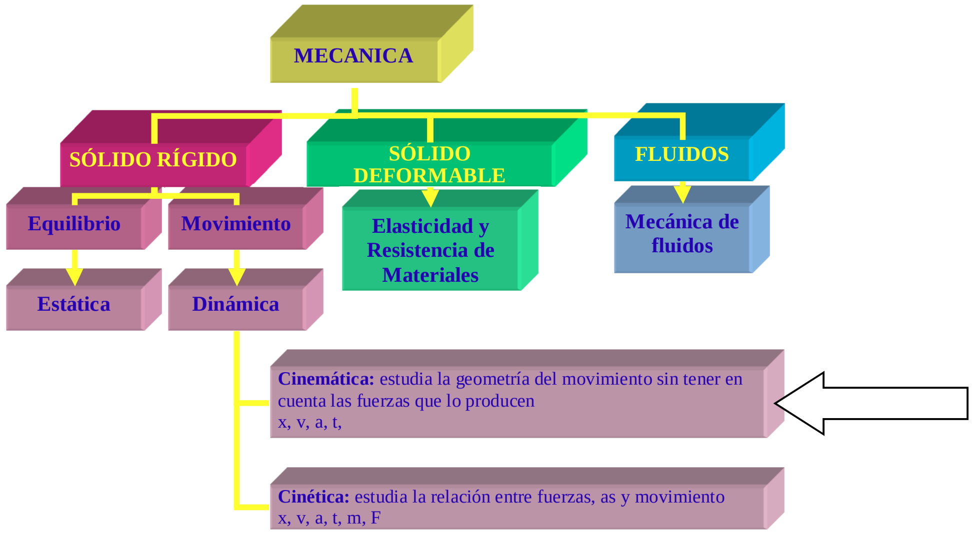


Figura 1

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de una partícula o un sólido rígido en relación con el tiempo, sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Las magnitudes empleadas son: longitud (x), velocidad (v), aceleración (*a*), tiempo (t).

A su vez, la cinemática puede clasificarse en:

- Cinemática de la partícula

Estudia el movimiento de un punto, en el plano o en el espacio, definiendo su trayectoria, velocidad y aceleración.

Se puede considerar el movimiento de un S.R. como si fuera un punto cuando sus desplazamientos son muy grandes en comparación con sus dimensiones (movimiento de un avión) o cuando se estudia únicamente la trayectoria del centro de un cuerpo (trayectoria parabólica de una piedra).

- Cinemática del sólido rígido

Es la que se ocupa del movimiento de un sólido rígido, compuesto a su vez por puntos. Un sólido rígido, a diferencia de la partícula, puede rotar y cada uno de sus puntos puede tener diferentes trayectorias, velocidades o aceleraciones.

Así, la cinemática del sólido rígido nos permitirá calcular tanto las velocidades y aceleraciones de puntos pertenecientes al sólido como las velocidades y aceleraciones angulares del propio sólido.

1.2. Definiciones iniciales.

Vector de posición, es el vector que une el origen del sistema de referencia, punto O, con el punto móvil P, definiendo su posición en el plano o en el espacio.

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} \tag{1}$$

En la Figura 2 se muestra el punto P en el instante inicial, P_1, y transcurrido un intervalo de tiempo Δt, P_2.

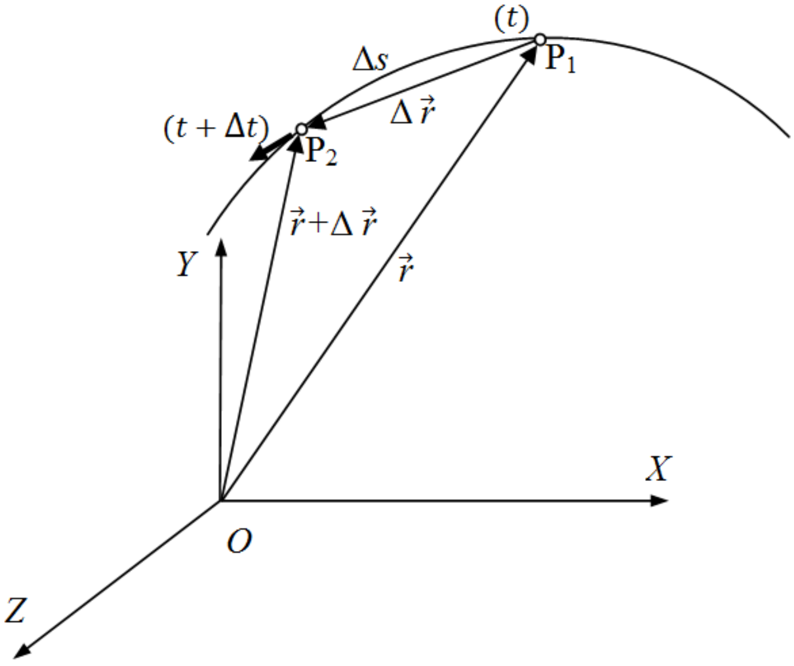


Figura 2

La expresión del vector de posición en función del tiempo define la **ecuación vectorial de la trayectoria** y determina el movimiento del punto.

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{\imath} + y(t) \cdot \vec{\jmath} + z(t) \cdot \vec{k} \tag{2}$$

La **trayectoria** es el lugar geométrico definido por las sucesivas posiciones que un punto ocupa en el tiempo. En función de la trayectoria seguida por un punto se puede hacer la siguiente clasificación de los movimientos:

- Movimiento curvilíneo: si su trayectoria es una línea curva cualquiera. Puede considerarse como un caso general dentro del cual pueden definirse el movimiento rectilíneo y el circular.
- Movimiento rectilíneo: cuando su trayectoria es una recta.
- Movimiento circular: cuando su trayectoria es una circunferencia.

El **vector desplazamiento** es aquel que une las posiciones inicial y final de un punto correspondientes a un determinado intervalo de tiempo y representa el cambio de magnitud y de dirección del vector de posición.

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1 = \Delta x \cdot \vec{\imath} + \Delta y \cdot \vec{\jmath} + \Delta z \cdot \vec{k} \qquad (3)$$

La **distancia** recorrida por un punto es el escalar que expresa el cambio de posición del punto en un intervalo de tiempo medido sobre la trayectoria Δs.

Cuando el intervalo de tiempo se reduce hasta tender a cero también se hace diferencial el **vector desplazamiento**:

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{\imath} + dy \cdot \vec{\jmath} + dz \cdot \vec{k} \qquad (4)$$

Asimismo, la distancia recorrida será también un valor diferencial, ds. En este caso, la secante se confunde con la tangente y se pueden igualar el módulo del desplazamiento y la distancia recorrida:

$$|d\vec{r}| = ds \qquad (5)$$

2. CINEMÁTICA DE LA PARTICULA

2.1. Velocidad de la partícula

Dado un móvil que se mueve desde el punto P_1 al punto P_2 (ver Figura 2), se define como **velocidad instantánea** en el instante t a la derivada del vector de posición respecto del tiempo en ese instante.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (6)$$

La velocidad instantánea, $\vec{v}$, es una magnitud vectorial puede expresarse de las siguientes formas:

- En función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{\imath} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{\jmath} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \qquad (7)$$

- Mediante su módulo y su dirección. Para ello se parte de la expresión de la velocidad instantánea y se opera de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overbrace{d\vec{r}}^{dirección}}{ds} \cdot \frac{\overbrace{ds}^{módulo}}{dt} \qquad (8)$$

Y pueden definirse las siguientes características de la velocidad instantanea:

$\vec{v}$:
· Módulo: $v = \frac{ds}{dt}$ [m/s]; indica la distancia recorrida por unidad de tiempo.

· Dirección: $\frac{d\vec{r}}{ds} = lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$; cuando $\Delta s \to 0$, el módulo de $\Delta \vec{r}$ y Δs son iguales y $\Delta \vec{r}$ se hace tangente a la trayectoria en el punto P_1. Se define el vector unitario $\vec{u}_t$:

$\to \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_t$, vector unitario tangente a la trayectoria en el punto P_1.

· Sentido: el del movimiento.

· Aplicada en el punto P_1 (vector ligado)

Asi, puede escribirse la velocidad instantanea en función de su modulo y un vector unitario tangente a la trayectoria que define su dirección y su sentido:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t = v \cdot \vec{u}_t \qquad (9)$$

2.2. Aceleración de la partícula

La aceleración mide la variación de la velocidad en el tiempo. La **aceleración instantánea** de un móvil en el instante t, es la derivada del vector velocidad respecto del tiempo en ese instante.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (10)$$

Al igual que ocurre con la velocidad, la aceleración instantánea, $\vec{a}$, es una magnitud vectorial que puede expresarse de diferentes maneras:

- En función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \qquad (11)$$

- En función de sus componentes tangente y perpendicular a la trayectoria que son las denominadas componentes tangencial y normal de la aceleración:

  Partiendo de la expresión que define la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} \qquad (12)$$

  Todos los términos de la expresión anterior son conocidos salvo la derivada del vector unitario respecto del tiempo, $\frac{d\vec{u}_t}{dt}$. Para calcular dicha derivada se procede descomponiéndola en otras tres que calcularemos posteriormente:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (13)$$

Se parte obteniendo la derivada del vector unitario respecto el ángulo abrazado por la trayectoria, $\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$. Para calcular esta derivada, debe observarse en la Figura 3 los vectores unitarios en las direcciones tangentes a la trayectoria del punto P para los instantes (t) y (t+Δt). Nótese que se han representado también el centro de curvatura C y el radio de curvatura ρ correspondientes a un intervalo de tiempo Δt que tiende a cero.

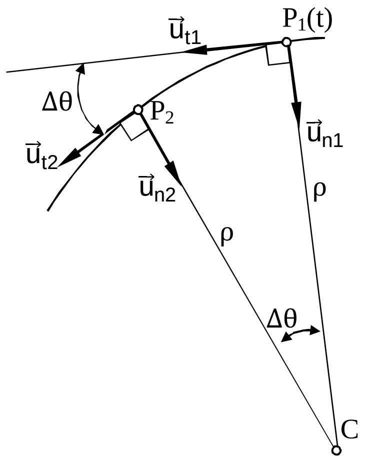


Figura 3

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$$

A continuación, tal y como se detalla en la Figura 4, se traza una circunferencia de radio 1 en la que se situarán los extremos de todos los vectores unitarios.

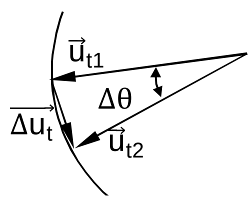


Figura 4

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = \vec{u}_n \tag{14}$$

Así, puede definirse el vector unitario normal a la trayectoria, con las siguientes características:

$\vec{u}_n$

- Módulo: cuando *Δθ→0* la cuerda ($\Delta\vec{u}_t$) y el arco *(Δs= r·Δθ= 1·Δθ)* coinciden, por lo que: $lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{1\cdot\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$
- Dirección: cuando $\Delta\theta \to 0$, $\frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$ se hace tangente a la circunferencia de radio unidad, por lo tanto perpendicular a $\vec{u}_t$, es decir sigue la dirección normal que viene indicada por $\vec{u}_n$.
- Sentido:

Para calcular el valor de la segunda derivada, $\frac{d\theta}{ds}$, se plantea que la longitud de un arco es el ángulo abarcado por su radio de curvatura ρ, obteniéndose:

$$ds = \rho \cdot d\theta \; ; \; \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \tag{15}$$

Por último, se sabe que la tercera derivada de la expresión (13), es decir, $\frac{ds}{dt}$ se corresponde con el módulo de la velocidad. Por lo tanto:

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{16}$$

Y llevando los resultados obtenidos en (14), (15) y (16) a la expresión (13), se obtiene:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{u}_n \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v \tag{17}$$

Sustituyendo en la expresión (12), se obtiene la aceleración en función de sus componentes tangencial y normal que se representan en la Figura 5.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{18}$$

La <u>aceleración tangencial</u>, es tangente a la trayectoria e indica el cambio del módulo de la velocidad .

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t \tag{19}$$

La <u>aceleración normal</u>, está dirigida siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria, es la responsable del cambio de dirección de la velocidad.

$$\vec{a}_n \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n \tag{20}$$

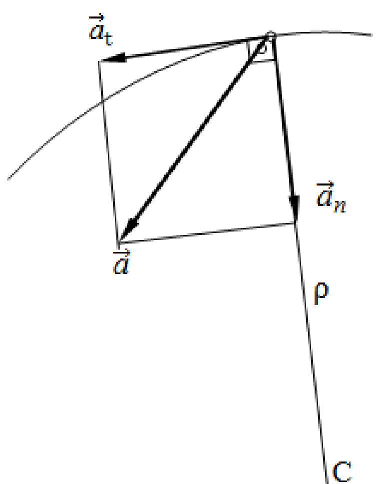


Figura 5

3. TIPOS DE MOVIMIENTOS DEL SÓLIDO RÍGIDO

3.1. <u>Clasificación</u>

Para un punto o **partícula** existe una sola trayectoria, así como una sola velocidad y aceleración en cada instante. Dependiendo de la trayectoria descrita por un punto, en el caso general el movimiento del punto será curvilíneo, pudiéndose mover con movimiento circular cuando el radio de curvatura de la trayectoria sea constante o con movimiento rectilíneo cuando sea infinito.

El caso del **sólido rígido** es bien diferente. Un sólido rígido está compuesto por un conjunto de puntos materiales tales que las distancias entre dos puntos cualesquiera permanece invariable, y en su movimiento se cumple que:

- ➯ <u>Cada uno de los puntos que pertenecen al sólido rígido describe su correspondiente trayectoria, con una velocidad y una aceleración determinadas</u>.

En el caso del sólido rígido pueden estudiarse los siguientes movimientos:

Movimientos elementales: Movimiento de traslación pura
Movimiento de rotación pura (rotación alrededor de un eje fijo).

Movimiento general: Incluye todos los movimientos del sólido rígido y permite estudiar el movimiento alrededor de un punto fijo y el movimiento plano como casos particulares.

Cinemática del movimiento relativo: Movimiento absoluto, relativo y de arrastre

3.2. <u>Movimiento de traslación pura</u>

Un sólido rígido se mueve con traslación pura cuando se mueve paralelo a sí mismo, lo que significa que cualquier recta contenida en el cuerpo mantiene su dirección en el movimiento. Entonces se cumple que:

- ⇨ <u>Cualquier punto del sólido rígido recorre trayectorias idénticas con la misma velocidad y aceleración y en consecuencia se puede hablar de una única velocidad o aceleración para el sólido rígido</u>.

Demostración: Se toman dos puntos A y B cualesquiera pertenecientes al sólido rígido, se relacionan sus vectores de posición (21) y se deriva (22).

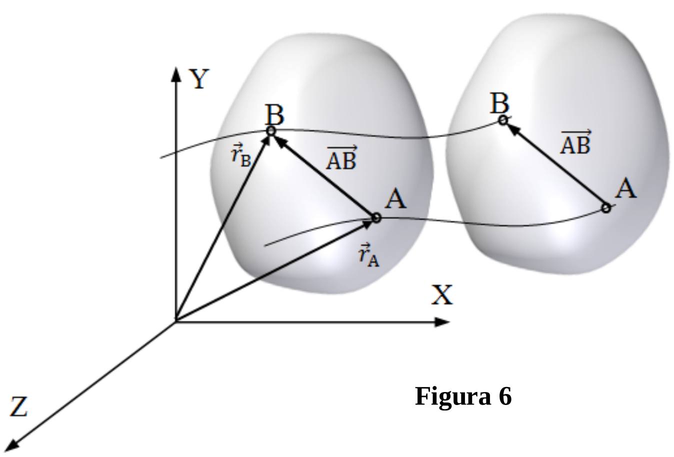


Figura 6

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad (21)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \qquad (22)$$

El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ es constante en módulo, $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{cte}$, (la distancia entre dos puntos pertenecientes a un sólido rígido es invariable) y en dirección, (en la traslación pura cualquier recta perteneciente a un sólido rígido mantiene su dirección en el movimiento) por lo que su derivada es nula:

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \qquad (23)$$

Sustituyendo en la derivada y derivando de nuevo:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A \tag{24}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{25}$$

Tal y como se ha demostrado, todos los puntos del sólido rígido tienen la misma velocidad y aceleración para un instante determinado. Por esta razón, en el caso de la traslación pura cuando se puede hablar de velocidad o aceleración del sólido rígido. La traslación puede ser rectilínea o curvilínea.

<u>Traslación rectilínea</u>: todos los puntos del sólido recorren trayectorias rectas y paralelas entre sí. En la Figura 7se ha ilustrado esta idea representando las velocidades de los puntos A y B.

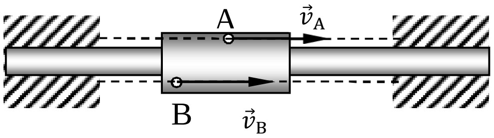


Figura 7

<u>Traslación curvilínea</u>: las trayectorias recorridas por los distintos puntos del cuerpo son curvas. En la Figura 8 la estructura circular de la noria tiene rotación pura pero las barquillas, despreciando los pequeños balanceos, tienen un movimiento de traslación circular.

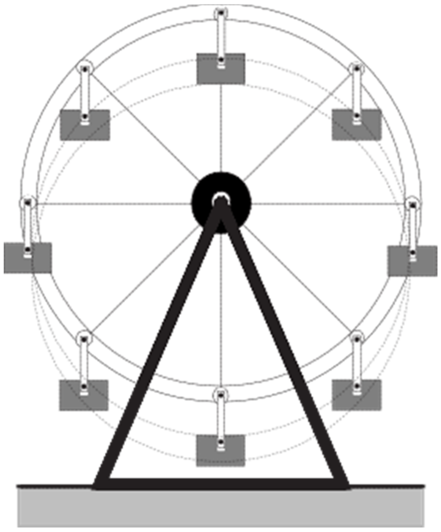


Figura 8

En el ejemplo anterior puede apreciarse que los puntos A y B describen circunferencias iguales con sus centros desplazados, los puntos tienen velocidades y aceleraciones iguales y la posición de la barquilla es siempre horizontal (cualquier recta contenida en el cuerpo mantiene su dirección en el movimiento).