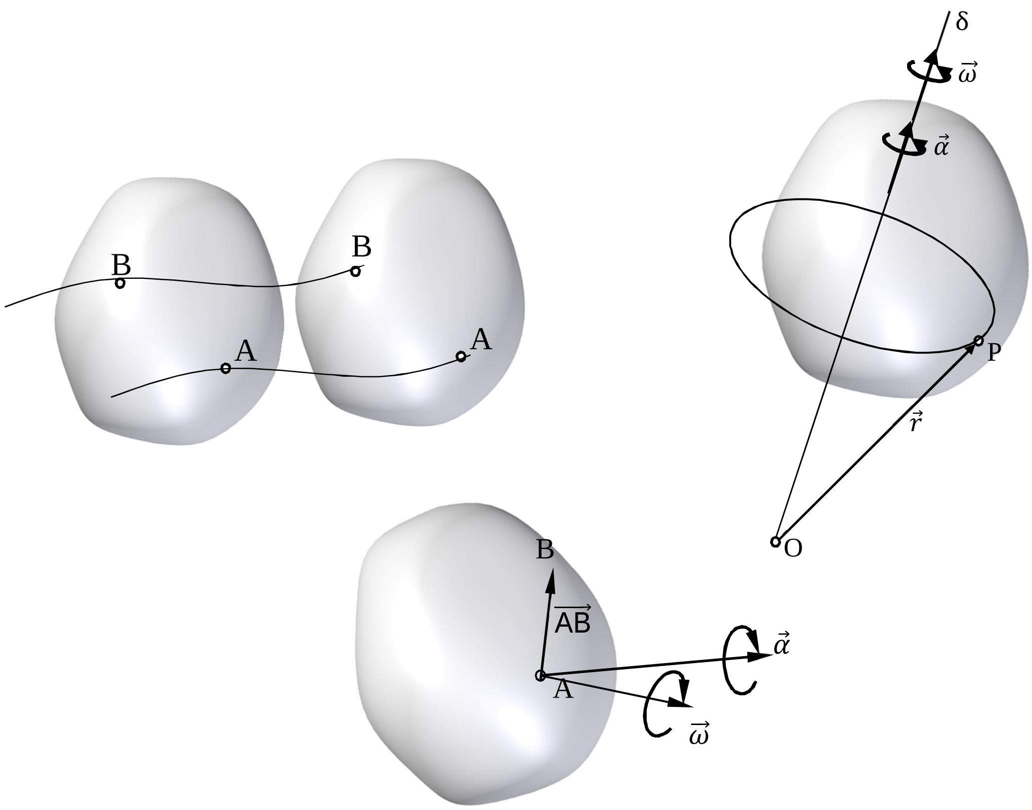
Cinemática del sólido rígido

Teoría básica para el curso

Cinemática del sólido rígido, ejercicios comentados



Ramírez López-Para, Pilar
Loizaga Garmendia, Maider
López Soto, Jaime

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Definición de Cinemática

El principal objetivo de este apartado es situar la cinemática dentro del ámbito de la mecánica, introduciendo los conceptos básicos relativos a la materia que se va a trabajar.

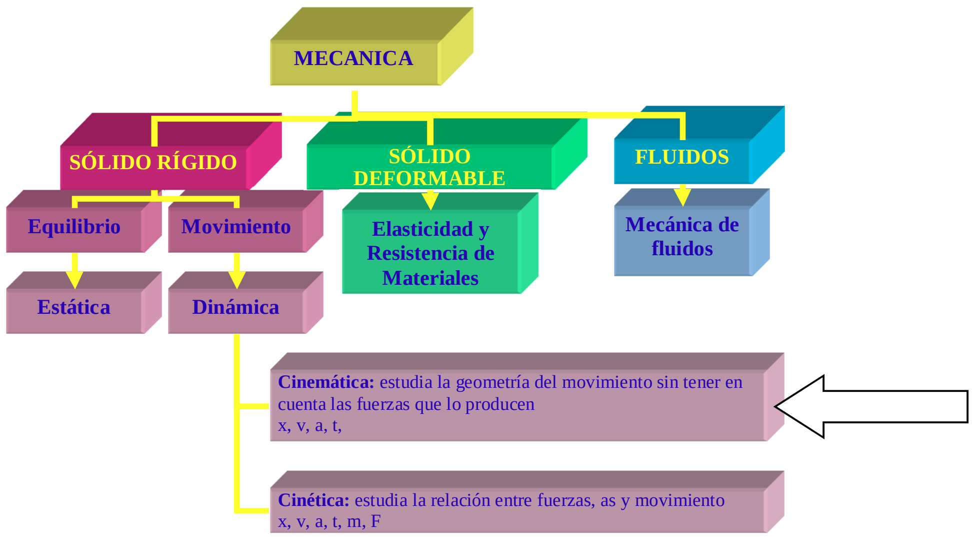


Figura 1

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de una partícula o un sólido rígido en relación con el tiempo, sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Las magnitudes empleadas son: longitud (x), velocidad (v), aceleración (a), tiempo (t).

A su vez, la cinemática puede clasificarse en:

- Cinemática de la partícula

Estudia el movimiento de un punto, en el plano o en el espacio, definiendo su trayectoria, velocidad y aceleración.

Se puede considerar el movimiento de un S.R. como si fuera un punto cuando sus desplazamientos son muy grandes en comparación con sus dimensiones (movimiento de un avión) o cuando se estudia únicamente la trayectoria del centro de un cuerpo (trayectoria parabólica de una piedra).

- Cinemática del sólido rígido

Es la que se ocupa del movimiento de un sólido rígido, compuesto a su vez por puntos. Un sólido rígido, a diferencia de la partícula, puede rotar y cada uno de sus puntos puede tener diferentes trayectorias, velocidades o aceleraciones.

Así, la cinemática del sólido rígido nos permitirá calcular tanto las velocidades y aceleraciones de puntos pertenecientes al sólido como las velocidades y aceleraciones angulares del propio sólido.

1.2. <u>Definiciones iniciales</u>.

Vector de posición, es el vector que une el origen del sistema de referencia, punto O, con el punto móvil P, definiendo su posición en el plano o en el espacio.

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} \tag{1}$$

En la Figura 2 se muestra el punto P en el instante inicial, P_1, y transcurrido un intervalo de tiempo Δt, P_2.

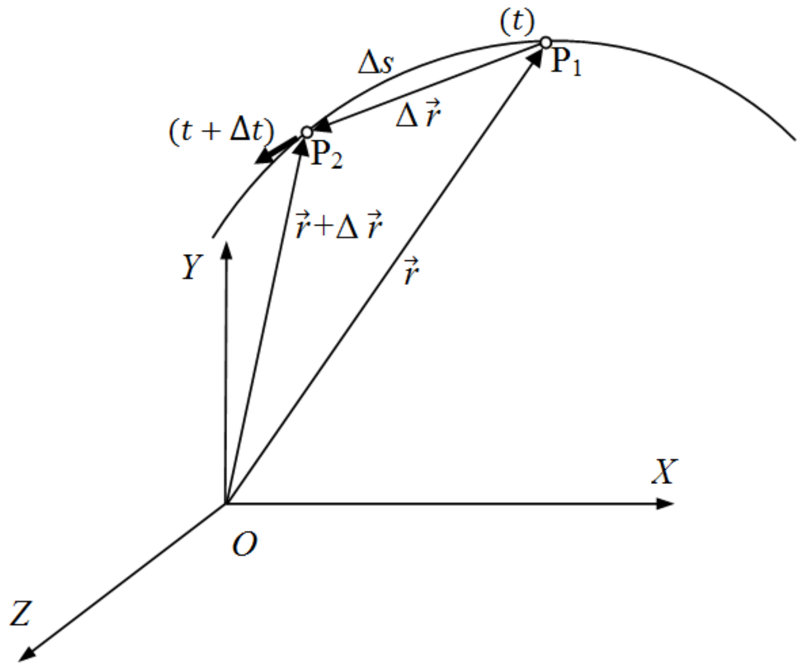


Figura 2

La expresión del vector de posición en función del tiempo define la **ecuación vectorial de la trayectoria** y determina el movimiento del punto.

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{\imath} + y(t) \cdot \vec{\jmath} + z(t) \cdot \vec{k} \tag{2}$$

La **trayectoria** es el lugar geométrico definido por las sucesivas posiciones que un punto ocupa en el tiempo. En función de la trayectoria seguida por un punto se puede hacer la siguiente clasificación de los movimientos:

- <u>Movimiento curvilíneo</u>: si su trayectoria es una línea curva cualquiera. Puede considerarse como un caso general dentro del cual pueden definirse el movimiento rectilíneo y el circular.
- <u>Movimiento rectilíneo</u>: cuando su trayectoria es una recta.
- <u>Movimiento circular</u>: cuando su trayectoria es una circunferencia.

El **vector desplazamiento** es aquel que une las posiciones inicial y final de un punto correspondientes a un determinado intervalo de tiempo y representa el cambio de magnitud y de dirección del vector de posición.

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1 = \Delta x \cdot \vec{\imath} + \Delta y \cdot \vec{\jmath} + \Delta z \cdot \vec{k} \tag{3}$$

La **distancia** recorrida por un punto es el escalar que expresa el cambio de posición del punto en un intervalo de tiempo medido sobre la trayectoria Δs.

Cuando el intervalo de tiempo se reduce hasta tender a cero también se hace diferencial el **vector desplazamiento**:

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{\imath} + dy \cdot \vec{\jmath} + dz \cdot \vec{k} \tag{4}$$

Asimismo, la distancia recorrida será también un valor diferencial, ds. En este caso, la secante se confunde con la tangente y se pueden igualar el módulo del desplazamiento y la distancia recorrida:

$$|d\vec{r}| = ds \tag{5}$$

2. CINEMÁTICA DE LA PARTICULA

2.1. Velocidad de la partícula

Dado un móvil que se mueve desde el punto P_1 al punto P_2 (ver Figura 2), se define como **velocidad instantánea** en el instante t a la derivada del vector de posición respecto del tiempo en ese instante.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{6}$$

La velocidad instantánea, $\vec{v}$, es una magnitud vectorial puede expresarse de las siguientes formas:

- En función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{\imath} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{\jmath} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} \tag{7}$$

- Mediante su módulo y su dirección. Para ello se parte de la expresión de la velocidad instantánea y se opera de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overbrace{d\vec{r}}^{dirección}}{ds} \cdot \frac{\overbrace{ds}^{módulo}}{dt} \tag{8}$$

Y pueden definirse las siguientes características de la velocidad instantanea:

$\vec{v}$:

· Módulo: $v = \frac{ds}{dt}$ [m/s]; indica la distancia recorrida por unidad de tiempo.

· Dirección: $\frac{d\vec{r}}{ds} = lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$; cuando $\Delta s \to 0$, el módulo de $\Delta \vec{r}$ y Δs son iguales y $\Delta \vec{r}$ se hace tangente a la trayectoria en el punto P_1. Se define el vector unitario $\vec{u}_t$:

$\rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_t$, vector unitario tangente a la trayectoria en el punto P_1.

· Sentido: el del movimiento.

· Aplicada en el punto P_1 (vector ligado)

Asi, puede escribirse la velocidad instantanea en función de su modulo y un vector unitario tangente a la trayectoria que define su dirección y su sentido:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t = v \cdot \vec{u}_t \qquad (9)$$

2.2. Aceleración de la partícula

La aceleración mide la variación de la velocidad en el tiempo. La **aceleración instantánea** de un móvil en el instante t, es la derivada del vector velocidad respecto del tiempo en ese instante.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (10)$$

Al igual que ocurre con la velocidad, la aceleración instantánea, $\vec{a}$, es una magnitud vectorial que puede expresarse de diferentes maneras:

- En función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k} \qquad (11)$$

- En función de sus componentes tangente y perpendicular a la trayectoria que son las denominadas componentes tangencial y normal de la aceleración:

  Partiendo de la expresión que define la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt} \qquad (12)$$

  Todos los términos de la expresión anterior son conocidos salvo la derivada del vector unitario respecto del tiempo, $\frac{d\vec{u}_t}{dt}$. Para calcular dicha derivada se procede descomponiéndola en otras tres que calcularemos posteriormente:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (13)$$

Se parte obteniendo la derivada del vector unitario respecto el ángulo abrazado por la trayectoria, $\frac{d\vec{u}_t}{d\theta}$. Para calcular esta derivada, debe observarse en la Figura 3 los vectores unitarios en las direcciones tangentes a la trayectoria del punto P para los instantes (t) y (t+Δt). Nótese que se han representado también el centro de curvatura C y el radio de curvatura ρ correspondientes a un intervalo de tiempo Δt que tiende a cero.

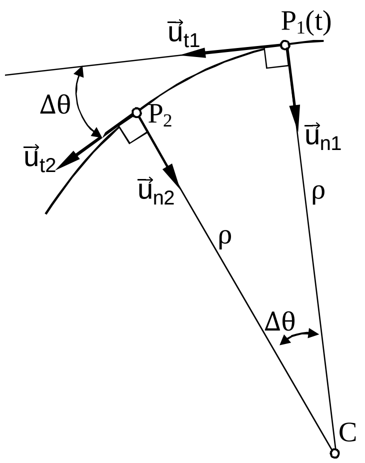


Figura 3

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$$

A continuación, tal y como se detalla en la Figura 4, se traza una circunferencia de radio 1 en la que se situarán los extremos de todos los vectores unitarios.

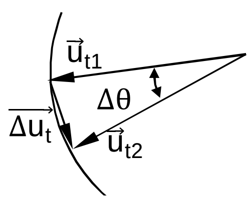


Figura 4

$$\frac{d\vec{u}_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = \vec{u}_n \qquad (14)$$

Así, puede definirse el vector unitario normal a la trayectoria, con las siguientes características:

$\vec{u}_n$

- · <u>Módulo</u>: cuando $\Delta\theta \to 0$ la cuerda $(\Delta\vec{u}_t)$ y el arco $(\Delta s = r \cdot \Delta\theta = 1 \cdot \Delta\theta)$ coinciden, por lo que: $lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta} = lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{1 \cdot \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$
- · <u>Dirección</u>: cuando $\Delta\theta \to 0$, $\frac{\Delta\vec{u}_t}{\Delta\theta}$ se hace tangente a la circunferencia de radio unidad, por lo tanto perpendicular a $\vec{u}_t$, es decir sigue la dirección normal que viene indicada por $\vec{u}_n$.
- · <u>Sentido</u>:

Para calcular el valor de la segunda derivada, $\frac{d\theta}{ds}$, se plantea que la longitud de un arco es el ángulo abarcado por su radio de curvatura ρ, obteniéndose:

$$ds = \rho \cdot d\theta \ ; \ \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad (15)$$

Por último, se sabe que la tercera derivada de la expresión (13), es decir, $\frac{ds}{dt}$ se corresponde con el módulo de la velocidad. Por lo tanto:

$$\frac{ds}{dt} = v \tag{16}$$

Y llevando los resultados obtenidos en (14), (15) y (16) a la expresión (13), se obtiene:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{u}_n \cdot \frac{1}{\rho} \cdot v \tag{17}$$

Sustituyendo en la expresión (12), se obtiene la aceleración en función de sus componentes tangencial y normal que se representan en la Figura 5.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{18}$$

La <u>aceleración tangencial</u>, es tangente a la trayectoria e indica el cambio del módulo de la velocidad .

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t \tag{19}$$

La <u>aceleración normal</u>, está dirigida siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria, es la responsable del cambio de dirección de la velocidad.

$$\vec{a}_n \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \tag{20}$$

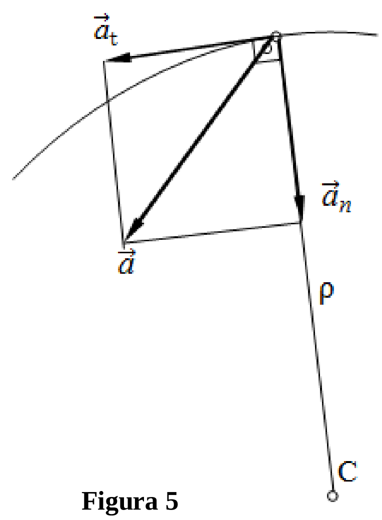


Figura 5

3. TIPOS DE MOVIMIENTOS DEL SÓLIDO RÍGIDO

3.1. <u>Clasificación</u>

Para un punto o **partícula** existe una sola trayectoria, así como una sola velocidad y aceleración en cada instante. Dependiendo de la trayectoria descrita por un punto, en el caso general el movimiento del punto será curvilíneo, pudiéndose mover con movimiento circular cuando el radio de curvatura de la trayectoria sea constante o con movimiento rectilíneo cuando sea infinito.

El caso del **sólido rígido** es bien diferente. Un sólido rígido está compuesto por un conjunto de puntos materiales tales que las distancias entre dos puntos cualesquiera permanece invariable, y en su movimiento se cumple que:

- ➪ <u>Cada uno de los puntos que pertenecen al sólido rígido describe su correspondiente trayectoria, con una velocidad y una aceleración determinadas</u>.

En el caso del sólido rígido pueden estudiarse los siguientes movimientos:

Movimientos elementales: Movimiento de traslación pura
Movimiento de rotación pura (rotación alrededor de un eje fijo).

Movimiento general: Incluye todos los movimientos del sólido rígido y permite estudiar el movimiento alrededor de un punto fijo y el movimiento plano como casos particulares.

Cinemática del movimiento relativo: Movimiento absoluto, relativo y de arrastre

3.2. Movimiento de traslación pura

Un sólido rígido se mueve con traslación pura cuando se mueve paralelo a sí mismo, lo que significa que cualquier recta contenida en el cuerpo mantiene su dirección en el movimiento. Entonces se cumple que:

➪ Cualquier punto del sólido rígido recorre trayectorias idénticas con la misma velocidad y aceleración y en consecuencia se puede hablar de una única velocidad o aceleración para el sólido rígido.

Demostración: Se toman dos puntos A y B cualesquiera pertenecientes al sólido rígido, se relacionan sus vectores de posición (21) y se deriva (22).

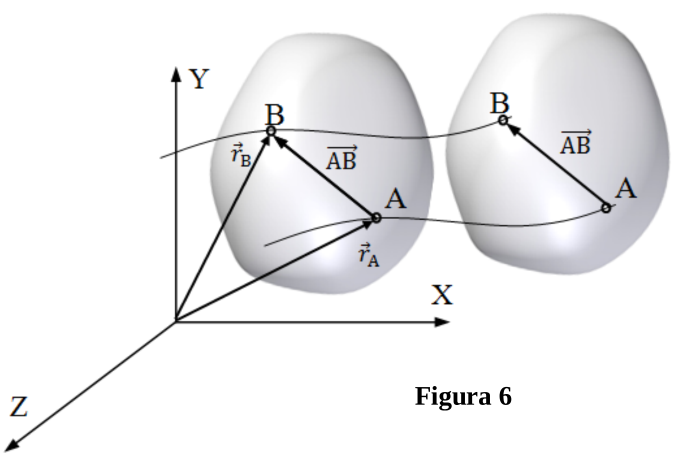


Figura 6

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \qquad (21)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \qquad (22)$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ es constante en módulo, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{cte}$, (la distancia entre dos puntos pertenecientes a un sólido rígido es invariable) y en dirección, (en la traslación pura cualquier recta perteneciente a un sólido rígido mantiene su dirección en el movimiento) por lo que su derivada es nula:

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \qquad (23)$$

Sustituyendo en la derivada y derivando de nuevo:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A \tag{24}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A \tag{25}$$

Tal y como se ha demostrado, todos los puntos del sólido rígido tienen la misma velocidad y aceleración para un instante determinado. Por esta razón, en el caso de la traslación pura cuando se puede hablar de velocidad o aceleración del sólido rígido. La traslación puede ser rectilínea o curvilínea.

<u>Traslación rectilínea</u>: todos los puntos del sólido recorren trayectorias rectas y paralelas entre sí. En la Figura 7se ha ilustrado esta idea representando las velocidades de los puntos A y B.

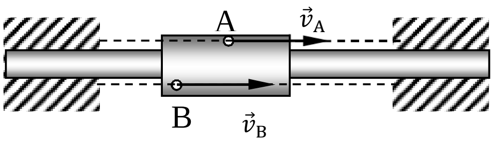


Figura 7

<u>Traslación curvilínea</u>: las trayectorias recorridas por los distintos puntos del cuerpo son curvas. En la Figura 8 la estructura circular de la noria tiene rotación pura pero las barquillas, despreciando los pequeños balanceos, tienen un movimiento de traslación circular.

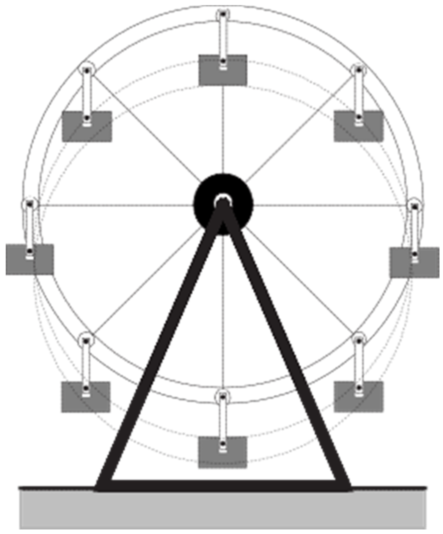


Figura 8

En el ejemplo anterior puede apreciarse que los puntos A y B describen circunferencias iguales con sus centros desplazados, los puntos tienen velocidades y aceleraciones iguales y la posición de la barquilla es siempre horizontal (cualquier recta contenida en el cuerpo mantiene su dirección en el movimiento).

3.3. Movimiento de rotación pura o rotación alrededor de un eje fijo

Se dice que un sólido tiene un movimiento de rotación pura cuando gira alrededor de un eje fijo.

- ⇨ Todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran alineados en una recta perpendicular a cada una de las trayectorias denominada eje de rotación. Los puntos situados sobre el eje de rotación tienen velocidad nula.

Para estudiar este tipo de movimiento comienza representándose un sólido rígido rotando alrededor del eje fijo δ, y definiendo las magnitudes vectoriales $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$, es decir la velocidad y aceleración angular del sólido.

Puesto que el sólido gira, su orientación cambia, y por lo tanto es necesario un parámetro que indique cómo de rápido gira, es decir un parámetro que exprese el ángulo girado por unidad de tiempo.

Siendo θ como el ángulo que gira el sólido en torno a su eje, pueden definirse la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$:

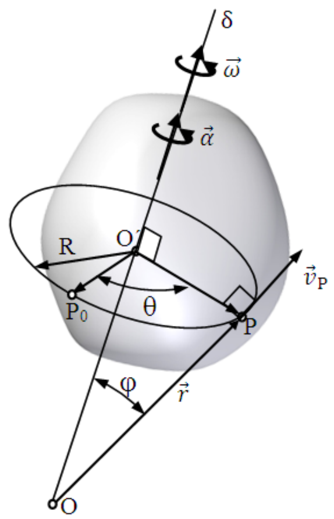


Figura 9

Velocidad angular del sólido rígido:

$\vec{\omega}$
- · Módulo: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
- · Dirección: perpendicular a la circunferencia trayectoria, pasando por su centro; coincide con la dirección del eje de rotación.
- · Sentido: el del avance del sacacorchos al girar en el sentido del movimiento.
- · Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación, ya que es un vector deslizante.

Aceleración angular del sólido rígido:

$\vec{\alpha}$
- · Módulo: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt}$
- · Dirección: perpendicular a la circunferencia trayectoria, pasando por su centro; coincide con la dirección del eje de rotación.
- · Sentido: cuando $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{\omega}$ el sólido gira cada vez rápido; si $\vec{\alpha}$ tiene sentido opuesto a $\vec{\omega}$, el sólido está frenando. Ver Figura 10.

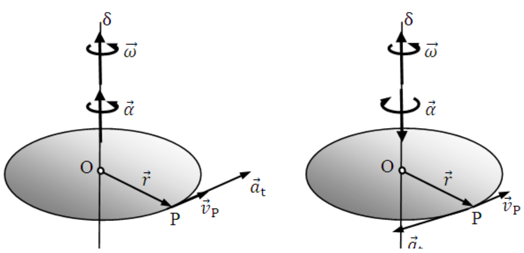


Figura 10

- · Punto de aplicación: cualquier punto del eje de rotación, ya que es un vector deslizante.

En este punto resulta interesante insistir en un par de ideas en torno a las dos magnitudes vectoriales definidas:

- Se puede hablar de una velocidad angular $\vec{\omega}$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ que definen el movimiento de rotación pura del sólido rígido.
- $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ también caracterizan los movimientos circulares de cada uno de los puntos pertenecientes al sólido rígido. Así, podremos calcular la velocidad y la aceleración lineales de un punto cualquiera del sólido rígido considerando su movimiento circular en un plano perpendicular al eje de rotación.

Aclaración: $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ tienen la misma dirección por tratarse de una rotación alrededor de un eje fijo, el cual es un movimiento particular. Se verá más adelante que en el caso del movimiento general $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ pueden tener direcciones diferentes.

Supóngase que a continuación desean conocerse la velocidad y aceleración lineales de un punto cualquiera P del sólido que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$ y una aceleración angular $\vec{\alpha}$ alrededor de un eje fijo δ.

En la Figura 11 se han representado el eje de rotación y la trayectoria de un punto. Puede observarse, que el eje de rotación δ pasa por un punto O conocido y que el punto P describe una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje δ y con su centro O´ en dicho eje.

Para calcular la velocidad del punto P se parte de la expresión de la velocidad instantánea obtenida anteriormente:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t \qquad (24)$$

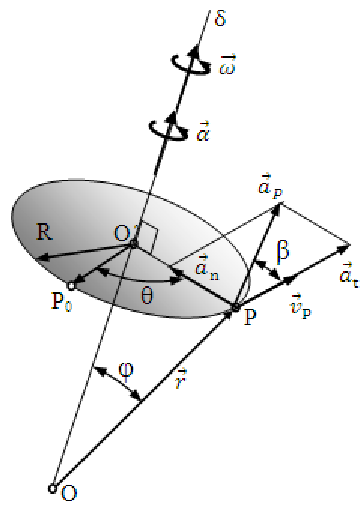


Figura 11

$\vec{v}_P$

· Módulo: Se sabe que $ds = Rd\theta$ y en la Figura 11 se observa $R = rsen\varphi$, por lo que,

$$v_P = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\theta}{dt} = R \cdot \omega = rsen\varphi \cdot \omega$$

· Dirección: $\vec{u}_t$ tangente a la trayectoria, es decir, tangente a la circunferencia

· Sentido: el del movimiento

· Aplicada en el punto P

Por último, se comprueba que el vector $\vec{v}_P$ es el producto vectorial de la velocidad angular del sólido y el vector de posición del punto P respecto de cualquier punto que pertenezca al eje de rotación:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{25}$$

Para calcular la <u>aceleración del punto P</u> se deriva la velocidad respecto del tiempo. La expresión obtenida puede descomponerse en las denominadas componentes intrínsecas de la aceleración: la aceleración tangencial y la aceleración normal.

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \vec{r}}_{a_{tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}_{a_{normal}} \tag{26}$$

<u>La aceleración tangencial</u>: $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$ (29)

$\vec{a}_t$

- Módulo: $a_t = \alpha \cdot rsen\varphi = R \cdot \alpha$ (30)
- Dirección: tangente a la circunferencia trayectoria en el punto P
- Sentido: el que origina α
- Aplicada en el punto P

<u>La aceleración normal</u>: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ (31)

$\vec{a}_n$

- Módulo: $a_n = \omega \cdot v_P \cdot sen90° = \omega \cdot R \cdot \omega = \omega^2 \cdot R$ (32)
- Dirección: Normal a la trayectoria
- Sentido: hacia el centro de la circunferencia descrita por el punto P
- Aplicada en el punto P

En el caso de que se conozca el centro O´ de la circunferencia descrita por el punto, ambas componentes de la aceleración pueden calcularse escalarmente.

Por último, indicar que pueden calcularse el módulo de la aceleración y el ángulo β que forma la aceleración con la tangente:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2 \cdot \alpha^2 + R^2 \cdot \omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{27}$$

$$tg\beta = \frac{a_n}{a_t} \tag{28}$$

3.3.1. Movimiento circular en el plano

En el caso de que el movimineto circular se produzca en el plano XY, el camculo de velocidades y aceleraciones descrito en el apartado anterior puede simplicarse notablemente.

La circunferencia trayectoria, así como la velocidad y las aceleraciones están contenidas en el plano XY, y además la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ son perpendiculares a dicho plano, es decir, paralelas al eje Z.

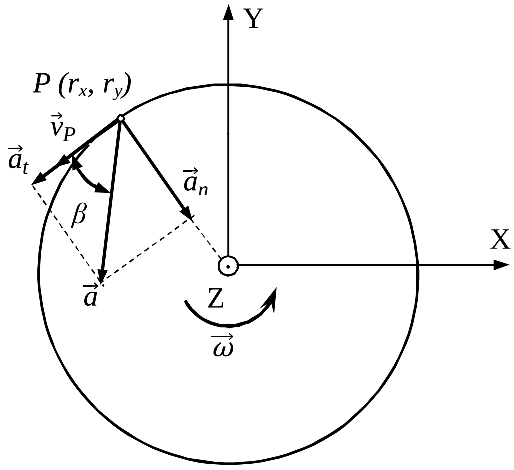


Figura 12

Para analizar la velocidad del punto P se parte de la expresión (27):

Velocidad del punto P: $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$\vec{v}_P$
- · Módulo: como $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$ son perpendiculares entre sí, $v_P = r \cdot sen90° \cdot \omega = \omega \cdot R$ (35)
- · Dirección: tangente a la circunferencia, contenida en el plano XY.
- · Sentido: el del movimiento
- · Aplicada en el punto P

Para analizar la aceleración del punto P, se parte de la expresión de las aceleraciones intrínsecas obtenidas anteriormente en el caso general:

La aceleración tangencial: $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}$

$\vec{a}_t$
- · Módulo: $a_t = R \cdot \alpha$ (36)
- · Dirección: tangente a la circunferencia y contenida en el plano XY
- · Sentido: si α es positivo, el sentido de la velocidad; si α es negativo, el contrario.
- · Aplicada en el punto P

La aceleración normal: $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$

$$\vec{a}_n \begin{cases} \cdot \text{ Módulo: } a_n = \omega \cdot (\omega \cdot R) sen 90° = \omega^2 \cdot R \\ \cdot \text{ Dirección: perpendicular al plano definido por } \vec{\omega} \text{ y } \vec{v}_P \text{, en la dirección normal.} \\ \cdot \text{ Sentido: hacia el centro de la circunferencia.} \\ \cdot \text{ Aplicada en el punto P} \end{cases} \quad (37)$$

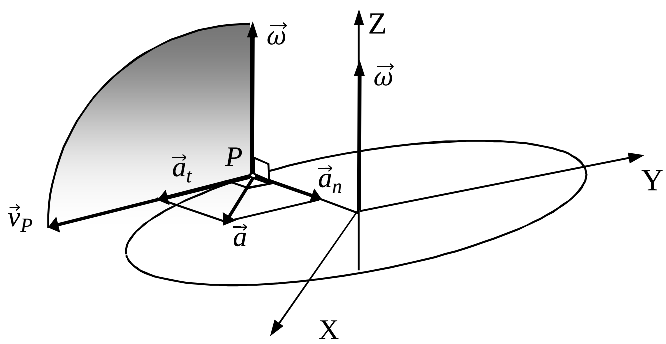


Figura 13

Otra forma de obtener la dirección y sentido de la aceleración normal es realizando analíticamente el producto vectorial que venimos trabajando $\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot r_y & \omega \cdot r_x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \cdot r_x \vec{i} - \omega^2 \cdot r_y \vec{j} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

(38)

Puede concluirse que se trata de un vector de módulo $\omega^2 \cdot r$ y sentido el contrario al del vector de posición $\vec{r}$. Esta expresión, $\vec{a}_n = -\omega^2 \cdot \vec{r}$, simplica los cálculos y puede utilizarse siempre que las coordenadas del vector $\vec{r}$ sean sencillas de calcular (esto ocurre en el movimiento plano y algunos casos espaciales).

3.4. Derivada temporal de un vector respecto de sistemas móviles. Ley de Boure.

A la hora de derivar un vector cualquiera $\vec{r}$ es imprescindible indicar respecto de que sistema de referencia es observado. En principio las variaciones de dicho vector serán observadas de manera diferente desde una referencia fija o respecto de otro sistema en movimiento. Se pueden relacionar las derivadas temporales de un vector cualquiera respecto de dos sistemas de referencia mediante la ley de Boure.

Se comienza observando que ocurre al desarrollar la **derivada temporal de un vector definido en un sistema en traslación**.

Se definen los sistemas de referencia fijo (OXYZ) y el móvil (O´X´Y´Z´) que únicamente se traslada. El vector $\vec{r}$ se define en el sistema móvil. El objetivo es definir la relación entre las derivadas del vector en ambos sistemas de referencia.

La derivada temporal de un vector $\vec{r}$ respecto a un sistema fijo coincide con la derivada respecto a un sistema en translación.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} \tag{39}$$

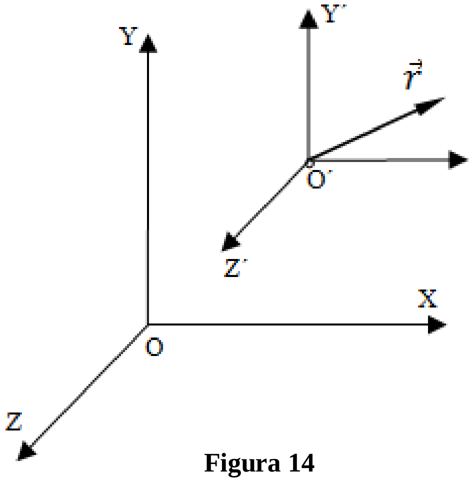


Figura 14

Ahora se observa un caso general como es la **derivada temporal de un vector respecto de un sistema en rotación.**

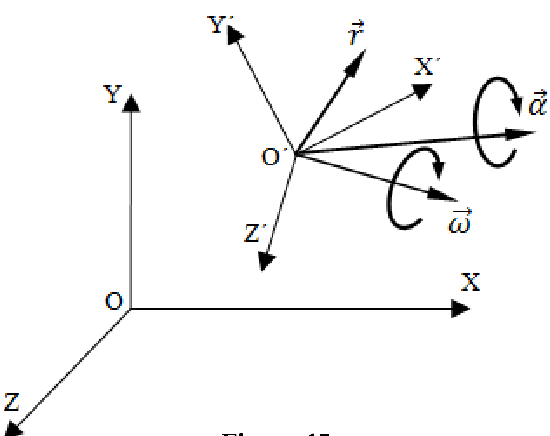


Figura 15

Se definen los sistemas de referencia fijo (OXYZ) y el móvil (O´X´Y´Z´) que rota con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$. Nuevamente se define el vector $\vec{r}$ en el sistema de referencia móvil.

La derivada temporal de un vector $\vec{r}$ respecto a un sistema fijo no coincide con la derivada respecto a un sistema en rotación. Para derivarlo deberemos aplicar la ley de Boure que se enuncia a continuación.

La deriva temporal de un vector $\vec{r}$ respecto de un sistema fijo es igual a la derivada del vector respecto del sistema móvil en rotación más el producto vectorial de $\vec{\omega}$, la velocidad angular del sistema móvil, por el vector en cuestión.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{29}$$

3.5. Movimiento general de un sólido rígido en el espacio

Hasta el momento se han definido la traslación y la rotación pura como movimientos elementales del sólido rígido. Se recuerda que en el caso de la traslación (Figura 16) todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración y por lo tanto pueden definirse una $\vec{v}$ y una $\vec{a}$ para el sólido.

En el caso de la rotación (Figura 17), pueden definirse una $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$, que son las que producen el cambio de orientación del sólido en el espacio.

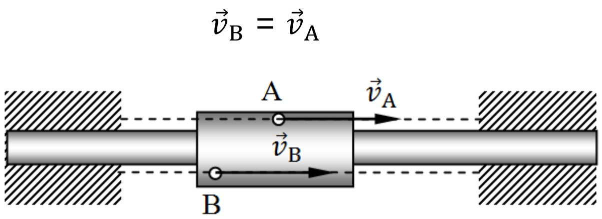


Figura 16

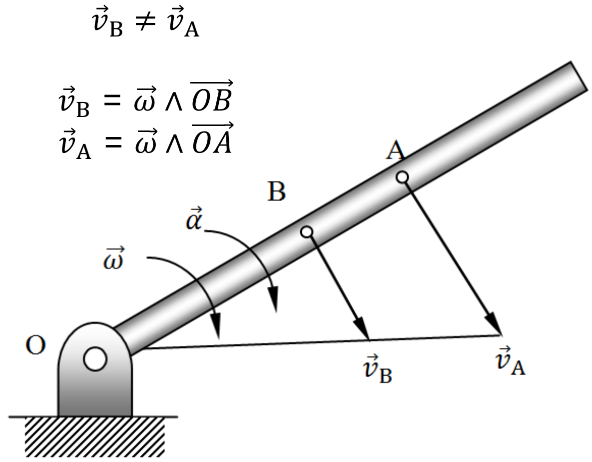


Figura 17

Si el movimiento de un sólido no se puede clasificar como uno de los dos movimientos particulares anteriores, traslación o rotación pura, se dice que se mueve con movimiento general.

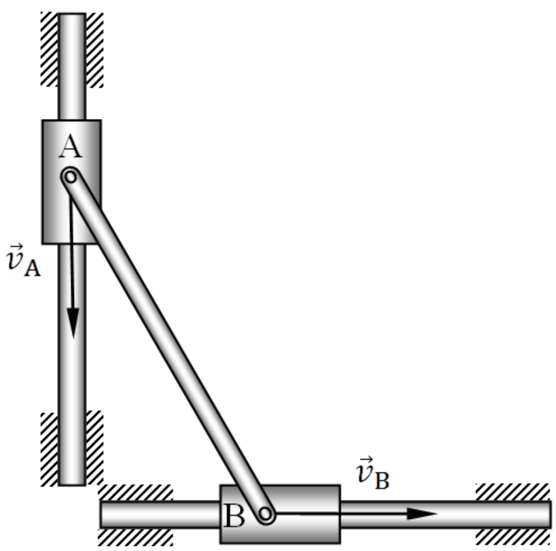


Figura 18

En el ejemplo de la Figura 18, la barra AB no tiene un movimiento de traslación ya que es evidente que los puntos A y B no tienen la misma velocidad y que la barra cambia de orientación en el movimiento. Sin embargo, tampoco se mueve con rotación pura ya que los puntos A y B no describen trayectorias circulares con eje común, por tanto puede deducirse que su movimiento es general.

Otro ejemplo de movimiento general, ahora en el espacio tridimensional, es el de una peonza, que puede girar en un punto fijo, variando la orientación del eje de rotación, o desplazarse, en cuyo caso el eje de rotación además de cambiar de orientación se desplaza. En cualquiera de estos casos, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ ya no tienen la misma dirección ya que se trata de un sólido con movimiento general.

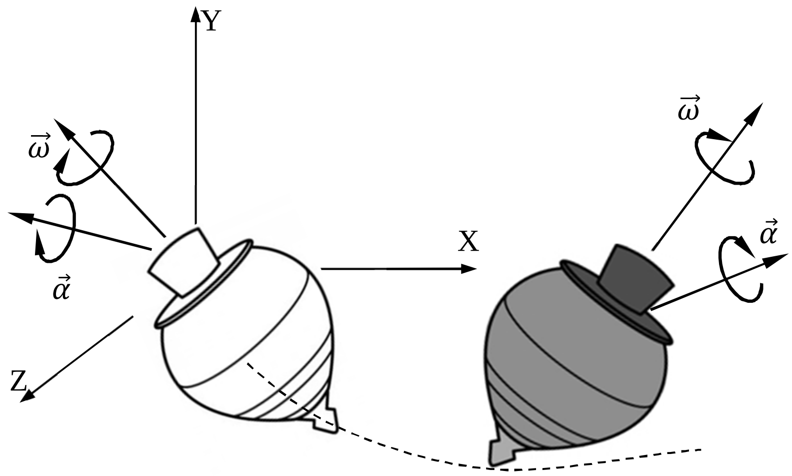


Figura 19

En este caso $\vec{\omega}$ tiene la dirección del eje instantáneo de rotación que será variable en el tiempo. Debido a la acción de $\vec{\alpha}$ tanto el módulo de $\vec{\omega}$ como su dirección varían; evidentemente la dirección de $\vec{\alpha}$ ha de ser diferente a la de $\vec{\omega}$ para poder modificar su dirección. Se puede establecer una analogía con la velocidad y aceleración lineales donde sabemos que la $\vec{v}$ y la $\vec{a}$ normalmente no tienen la misma dirección (en este caso, la aceleración tangencial a_t, modifica el módulo de la velocidad y a_n, de dirección diferente a v, la dirección).

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (30)$$

3.6. Campo de velocidades y de aceleraciones en el movimiento general:

A continuación se determinará la relación que existe entre las velocidades de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido y posteriormente la relación entre las aceleraciones de estos mismos puntos.

En el espacio tridimensional de la Figura 20 definido por un sistema de referencia fijo OXYZ, un sólido rígido se mueve libremente. Se considera un sistema móvil O´X´Y´Z´ unido rígidamente al sólido, de manera que pueda identificarse dicho sistema el sólido estudiado.

Tanto los ejes como el sólido, unidos rígidamente, realizan el movimiento general que un sólido rígido puede tener en el espacio, es decir se trasladan y rotan con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$. Se observa que en el movimiento general $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ ya no tienen la misma dirección ya que, como se dijo cuando se estudió el movimiento elemental de rotación pura, esto solo ocurre cuando el eje de rotación es fijo.

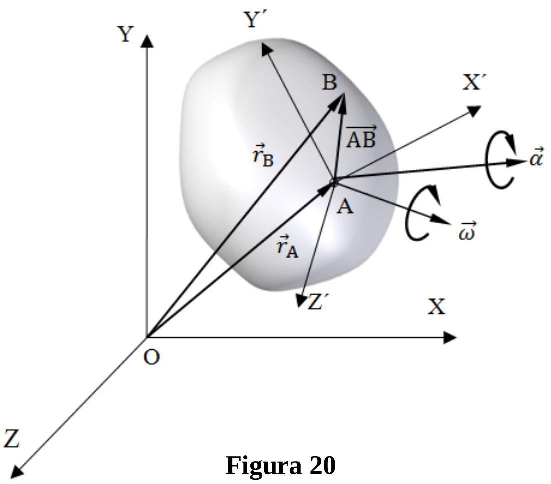


Figura 20

El estudio del movimiento general del sólido rígido, parte de definir el vector de /posición de un punto cualquiera perteneciente al sólido rígido y de derivarlo dos veces respecto del tiempo:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \tag{31}$$

El campo de velocidades del sólido rígido se obtiene a partir de la primera derivada de la expresión (42):

$$\left(\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \tag{43}$$

Puesto que el vector $\overrightarrow{AB}$ está situado en el sistema móvil, es decir en un sistema en rotación, es necesario aplicar la ley de Boure para obtener su derivada:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{44}$$

Como el vector $\overrightarrow{AB}$ une dos puntos del sólido rígido tiene un módulo constante y además no cambia su dirección visto desde el sistema móvil, se concluye que la derivada de dicho vector en el sistema móvil es nula, es decir que $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = 0$, por lo que:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{45}$$

Y por lo tanto se concluye que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}} \tag{46}$$

Analizando el resultado, puede afirmarse que es posible calcular la velocidad de un punto B del sólido sumando a la velocidad de un punto A arbitrario la velocidad debida a la rotación del punto B alrededor de dicho punto A.

El <u>campo de aceleraciones</u> del sólido se obtiene a partir de la segunda derivada de la expresión (42):

$$\left(\frac{d\vec{v}_B}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (47)$$

Y se obtiene:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)} \qquad (48)$$

Se puede calcular la aceleración de un punto B cualquiera del sólido rígido como la suma de la aceleración de un punto A arbitrario la aceleración debida a la rotación del punto B alrededor de de dicho punto A.

Por lo según las expresiones (46) y (48) puede concluirse que la velocidad y/o aceleración de un punto B cualquiera del sólido puede calcularse como la suma de la velocidad y/o aceleración de un punto cualquiera A y la velocidad y/o aceleración debidas a la rotación del punto B alrededor de un eje que pasa por el punto A.

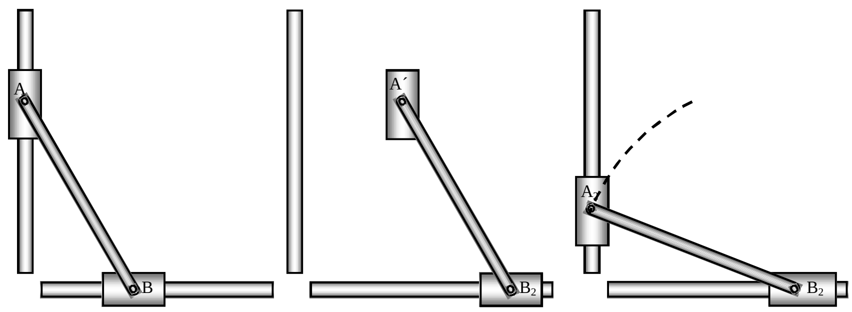
$$\begin{array}{llll} \vec{v}_B = & \vec{v}_A & + & \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \vec{a}_B = & \vec{a}_A & + & \underbrace{\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB}}_{a_{tangencial}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}_{a_{normal}} \end{array}$$

Traslación de A

Rotación de B alrededor de A

El cálculo realizado para el punto B puede extenderse a cualquier punto del sólido rígido, permitiendo extraer la siguiente conclusión:

⇨ El movimiento general un sólido rígido consiste en una <u>traslación y una rotación simultáneas</u> y por lo tanto puede expresarse en cada instante como la <u>superposición de una traslación de un punto de referencia arbitrario y una rotación alrededor del eje que pasa por dicho punto de referencia</u>.

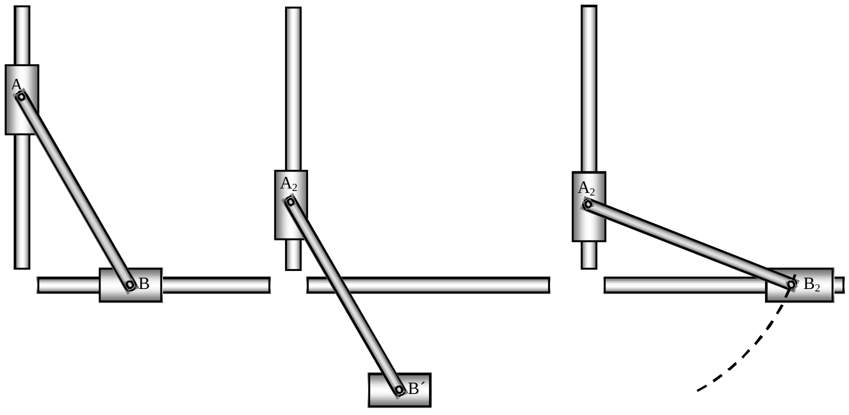


Movimiento general de la barra AB tomando como referencia el punto

1. posición inicial
2. la barra AB se traslada como lo hace el punto B
3. la barra AB rota alrededor del punto B

Figura 21

En las Figura 21 y la Figura 22se ha estudiado el movimiento general de la barra AB como la superposición de un movimiento de rotación y otro de traslación. En el primer caso se toma como referencia el punto B y en el segundo caso la referencia es el punto A. Es evidente que la barra no realiza estos movimientos de forma sucesiva pero también es cierto que se puede estudiar el movimiento como si así fuera.



Movimiento general de la barra AB tomando como referencia el punto A

1. posición inicial
2. la barra AB se traslada como lo hace el punto A
3. la barra AB rota alrededor del punto A

Figura 22

3.7. <u>Procedimiento de cálculo de velocidades y aceleraciones en el movimiento general</u>

Se pueden establecer los siguientes pasos para obtener las velocidades o aceleraciones de un sólido rígido que se mueve con movimiento general.

1. <u>Elección del sólido rígido con movimiento general</u>

   Tanto el punto del cual queremos calcular su velocidad o aceleración como el punto de referencia deben pertenecer al sólido elegido.

2. <u>Elección del punto de referencia</u>

   Cualquier punto es válido, de las infinitas combinaciones de traslación y rotación posibles se trata de buscar una que simplifique los cálculos. En el caso de que el sólido tenga un <u>punto fijo</u> es aconsejable tomarlo como punto de referencia. Si el sólido no tiene ningún punto fijo, debe elegirse <u>un punto cuya velocidad y/o aceleración sean conocidas o puedan calcularse fácilmente</u>.

3. <u>Estudiar el movimiento como la suma de una traslación una rotación</u>

   Tal y como se ha deducido en las expresiones (46) y (48) la velocidad y/o aceleración de un punto cualquiera puede obtenerse como la superposición de una traslación de un punto de referencia y una rotación alrededor de dicho punto. En el caso en que el sólido rígido tenga un punto fijo, el movimiento se reduce a una rotación ya que tomando como referencia dicho punto, la translación se anularía.

4. MOVIMIENTO RELATIVO

4.1. Movimiento relativo de un punto respecto a un sistema de referencia en traslación

Se definen un sistema de referencia fijo OXYZ, un sistema móvil que se traslada O´X´Y´Z´ y un punto P se mueve dentro del sistema móvil, ver Figura 23.

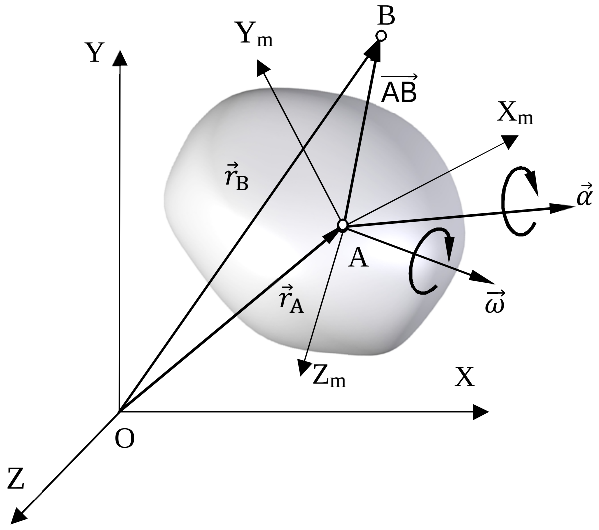


Figura 23

Dados:

$\vec{r}_P$: posición del punto P respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_A$: posición del punto A respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_P$´: posición del punto P respecto del sistema móvil.

En la Figura 23 se observa que:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P{}' \qquad (49)$$

El campo de velocidades se obtiene derivando la expresión (49) respecto el sistema fijo:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (50)$$

Analizando los términos de la expresión (50):

$\vec{r}_P$ y $\vec{r}_A$ están referidos al sistema fijo y sus derivadas son:

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ velocidad absoluta del punto P. La velocidad absoluta se define siempre respecto al sistema fijo.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ velocidad de traslación del sistema móvil, es la velocidad que tendría el punto P si estuviera rígidamente unido al sistema O´X´Y´Z´. Este término representa la velocidad de arrastre del punto P.

$\vec{r}_{\mathrm{P}}{}'$ está situado en el sistema móvil en translación y por lo tanto se cumple que:

$$\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} = \vec{v}_P{}'$$

⇨ representa la velocidad relativa del punto P, respecto al sistema móvil. Es la velocidad del punto P que percibe un observador situado en el sistema móvil.

Y llevando estos resultados a la expresión (50), se obtiene que:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{P}}{}' \qquad (51)$$

El campo de aceleraciones se obtiene derivando la expresión del campo de velocidades (51), y se obtiene que:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathrm{P}}{}' \qquad (52)$$

Al analizar las expresiones (51) y (52) puede concluirse que el movimiento absoluto de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que a su vez se traslada, puede estudiarse como la superposición de dos movimientos:

- Un movimiento de **arrastre:** es el movimiento que tendría el punto, si estuviese soldado al sistema de referencia que se traslada. Como es lógico, coincide con el movimiento del sistema móvil respecto del fijo. Este término indica la velocidad y/o aceleración que tiene el punto por estar en un sistema en movimiento.
- Un movimiento **relativo:** es el movimiento que tiene el punto para un observador situado en el sistema móvil.

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{P}}\\ \vec{a}_{\mathrm{P}}\end{matrix}} \begin{matrix}=\\=\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{A}}\\ \vec{a}_{\mathrm{A}}\end{matrix}} \begin{matrix}+\\+\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{\mathrm{P}}{}'\\ \vec{a}_{\mathrm{P}}{}'\end{matrix}}$$

⇩ Movimiento **absoluto** ⇩ Movimiento **arrastre** ⇩ Movimiento **relativo**

4.2. Movimiento relativo general de un punto respecto a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis

En el párrafo anterior se ha estudiado el movimiento de un punto P situado en un sistema en translación; en este apartado se estudiará el caso general en el cual el sistema móvil puede, además de trasladarse, girar.

En la Figura 24, se definen un sistema de referencia fijo OXYZ, un sistema de referencia móvil O´X´Y´Z´ que se traslada con $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ y $\vec{a}_{\mathrm{A}}$ y gira con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ y por último un punto P se mueve dentro del sistema móvil.

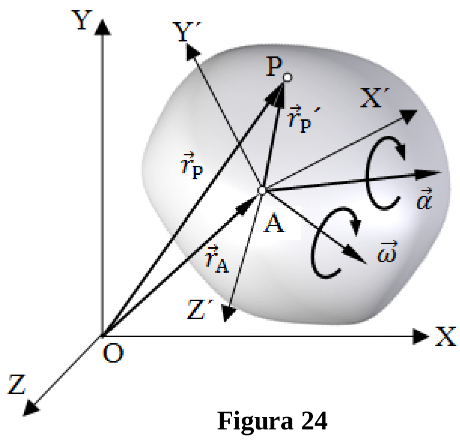


Figura 24

Se definen los siguientes vectores:

$\vec{r}_P$: posición del punto B respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_A$: posición del punto A respecto del sistema fijo.

$\vec{r}_P$´: posición del punto B respecto del sistema móvil.

Al igual que en apartado anterior, en la Figura 24 se observa que:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_P{}' \qquad (53)$$

El campo de velocidades se obtiene derivando la expresión (53) respecto del sistema fijo.

$$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (54)$$

Al igual que ocurría en el caso anterior, $\vec{r}_P$ y $\vec{r}_A$ están referidos al sistema fijo y por lo tanto se derivan directamente, sin embargo $\vec{r}_P$´ está referido al sistema móvil por lo que habrá que aplicar la ley de Boure para obtener su derivada.

$\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_P$ ⇨ velocidad absoluta del punto P, respecto al sistema fijo.

$\left(\frac{d\vec{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{v}_A$ ⇨ velocidad de traslación del sistema móvil.

$\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}' = \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'$ ⇨ donde se ha tenido en cuenta que el término $\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'}$ representa lavelocidad relativa de P respecto al sistema móvil.

Llevando estos resultados a la expresión (54):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}' \qquad (55)$$

Y reordenando los términos:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_P{}'}_{v_{relativa}} \qquad (56)$$

La velocidad absoluta de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que además de trasladarse, rota, puede estudiarse como la suma de dos velocidades:

- Una velocidad de **arrastre:** es el movimiento que tendría el punto, si estuviese soldado al sistema de referencia móvil. En este supuesto, el sistema y el punto se mueven solidariamente, como si se tratase de un sólido rígido con un movimiento general, definido por las magnitudes cinemáticas atribuidas en un comienzo al sistema móvil: $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$. Recordando la conclusión obtenida del estudio del campo de velocidades de un sólido rígido (46), el movimiento del punto P puede estudiarse como la superposición de la traslación de un punto de referencia del mismo sólido, en este caso punto A, origen del sistema de referencia, y una rotación del punto P alrededor del eje que pasa por dicho punto de referencia.
- Una velocidad **relativa:** es la velocidad que tiene el punto P para un observador situado en el sistema móvil. Es evidente que este término es la derivada del vector de posición definido en el sistema de referencia móvil, respecto del propio sistema móvil.

El campo de aceleraciones se obtiene derivando la expresión (55) respecto del sistema fijo:

$$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} \qquad (57)$$

Analizando cada uno de estos términos:

$\left(\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_P$ ⇨ aceleración absoluta del punto P, respecto al sistema fijo

$\left(\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{a}_A$ ⇨ aceleración de traslación del sistema móvil.

$\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' = \vec{a}_P{}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P$ ⇨ donde se ha tenido en cuenta que el término $\left(\frac{d\vec{v}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'}$ representa la aceleración relativa de P respecto al sistema móvil.

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{XYZ} \wedge \vec{r}_P{}' = \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}}^{=0}\right] \wedge \vec{r}_P{}' = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P{}'$$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{XYZ} = \vec{\omega} \wedge \left[\left(\frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}\right)_{X'Y'Z'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}'\right] = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P{}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P{}')$$

Sustituyendo en la ecuación (55):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_P' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P' + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P') \tag{58}$$

Y reordenando los términos:

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P')}_{a_{arrastre}} + \underbrace{\vec{a}_P'}_{a_{relativa}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P'}_{a_{Coriolis}} \tag{59}$$

La <u>aceleración absoluta</u> de un punto que se mueve dentro de un sistema de referencia que además de trasladarse, rota, puede estudiarse como la suma de tres aceleraciones:

- Una <u>aceleración de **arrastre**</u>**:** es la aceleración del punto considerándolo parte de un sólido soldado al sistema de referencia móvil cuyo movimiento general está definido por las magnitudes cinemáticas $\vec{v}_A$, $\vec{a}_A$, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$.
- Una <u>aceleración **relativa**</u>**:** es la aceleración que tiene el punto P para un observador situado en el sistema móvil.
- Una <u>aceleración de **Coriolis**</u>: Es un término que aparece las magnitudes vectoriales aplicando la ley de Boure.

Analizando las expresiones (56) y (59) puede obtenerse el siguiente paralelismo, similar al que se ha obtenido para las expresiones (51) y (52):

$\vec{v}_P$	=	$\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P'$	+	$\vec{v}_P'$		
$\vec{a}_P$	=	$\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_P' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P')$	+	$\vec{a}_P'$	+	$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P'$
Movimiento **absoluto**		Movimiento de **arrastre**		Movimiento **relativo**		Aceleración de **Coriolis**

A continuación va a utilizarse un sencillo ejemplo para ilustrar los conceptos de movimiento absoluto, de arrastre y relativo. En la Figura 25, se presenta un mecanismo sencillo formado por un casquillo que desliza a lo largo de la barra AB con velocidad y aceleración $\vec{v}_{P/AB}$ y $\vec{a}_{P/AB}$ al mismo tiempo que la barra AB gira con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$.

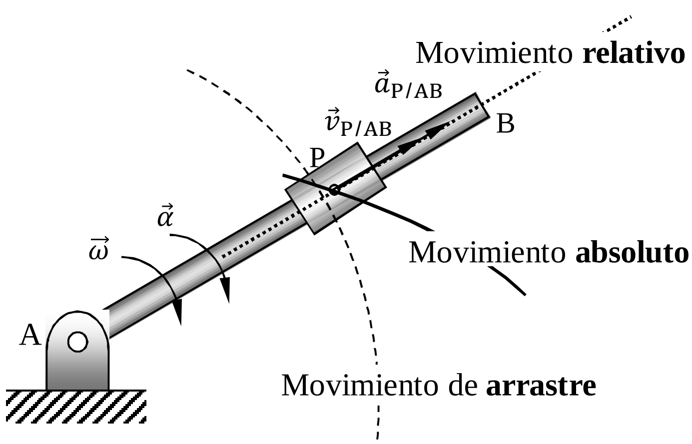


Figura 25

El movimiento de **arrastre** del punto P es el que tiene dicho punto debido estar definido en un sistema que se mueve respecto del sistema de referencia fijo.

En el ejemplo, el punto P del casquillo está obligado a moverse sobre la barra que está girando, el movimiento de arrastre es el que tendría el punto P si perteneciera a la barra, describiría una trayectoria circular con centro en A.

El movimiento **relativo** del punto P es el que percibe un observador situado en el sistema móvil. Es el movimiento que queda al anular el inmovilizar del sistema móvil.

En el ejemplo, el sistema móvil está definido por la barra AB y por lo tanto el movimiento relativo es el observado desde ésta sin tener en cuenta su giro. Es el deslizamiento del casquillo respecto de la barra y como es lógico tendrá la dirección de ésta.

Por último el movimiento absoluto del punto P es el observado desde un sistema de referencia fijo, superposición de los dos anteriores.

En el ejemplo, para un observador situado en el suelo, el punto P describe una trayectoria curva con radio de curvatura variable.

4.3. Movimiento relativo entre dos sólidos

En los apartados anteriores se ha estudiado el movimiento de un punto situado en sistemas se trasladan y/o rotan; el objetivo de este apartado es analizar el movimiento general de un sólido rígido respecto de un sistema móvil que puede trasladarse y/o rotar.

En este caso se definen el sistema de referencia fijo *OXYZ* y dos sólidos rígidos S_1y S_2con movimientos generales independientes, ligados respectivamente a los sistemas móviles $AX_1Y_1Z_1$, que se traslada con $\vec{v}_A$ y $\vec{a}_A$ y gira con $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$ y $BX_2Y_2Z_2$ que se traslada con $\vec{v}_B$ y $\vec{a}_B$ y gira con $\vec{\omega}_2$ y $\vec{\alpha}_2$.

A continuación se definen los campos de velocidades y aceleraciones de un punto arbitrario P que se mueve dentro del sistema móvil S_2.

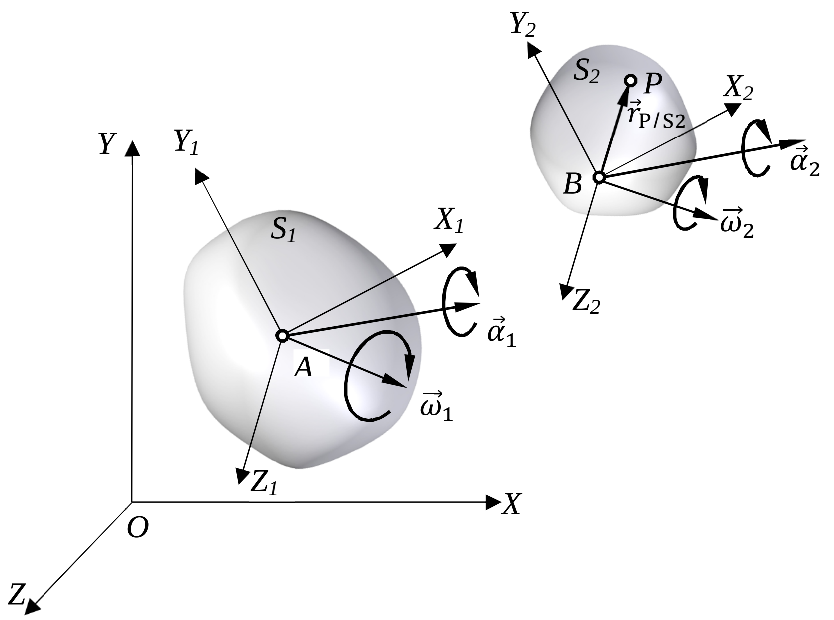


Figura 26

4.3.1. Campo de velocidades relativas a S_1:

Partiendo de la relación de velocidades entre los puntos B y P del sólido S_2 que se mueve con movimiento general, se obtiene:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \quad (60)$$

Por otro lado, las velocidades de los puntos P y B pueden plantearse desde el sistema S_1, descomponiéndolas en sendos términos de arrastre relativos:

$$\underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AP}}_{v_{Parrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{P/S1}}_{v_{Prelativa}} = \underbrace{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB}}_{v_{arrastre}} + \underbrace{\vec{v}_{B/S1}}_{v_{relativa}} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \quad (61)$$

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ y sustituyéndolo en la expresión anterior (61):

$$\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \quad (62)$$

Simplificando:

$$\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BP} \quad (63)$$

Y finalmente se obtiene que:

$$\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge \overrightarrow{BP} \quad (64)$$

Puesto que la expresión anterior define el campo de velocidades del movimiento general de S_2referido al sistema S_1, es evidente que el término $(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)$ es la velocidad de S_2 respecto de S_1, es decir:

$$\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \quad (65)$$

Y queda demostrado que la velocidad angular absoluta del sistema S_2, la observada desde el sistema fijo, es la suma de la velocidad angular de arrastre la velocidad angular relativa.

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} \quad (66)$$

Por último, puede concluirse que la expresión del **campo de velocidades relativas** es similar al de las velocidades absolutas, refiriendo todos los términos al sistema móvil S_1 en lugar de al sistema fijo.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/S1} = \vec{v}_{B/S1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \quad (67)$$

4.3.2. Campo de aceleraciones relativas a S_1:

Para el estudio de las aceleraciones es necesario derivar la expresión obtenida para el campo de velocidades respecto de S_1 (64). Para derivar correctamente el vector $\overrightarrow{BP}$ respecto de S_1, es necesario aplicar la ley Boure, teniendo en cuenta que respecto el sistema S_1, dicho vector está girando con $\vec{\omega}_{2/1}$.

$$\left(\frac{d\vec{v}_{P/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} = \left(\frac{d\vec{v}_{B/S1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_1Y_1Z_1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \left[\overbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{BP}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2}}^{=0} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}\right] \tag{68}$$

Y puede observarse que, análogamente a lo concluido para el campo de velocidades relativas, la expresión obtenida para el **campo de aceleraciones relativas** es similar al de las aceleraciones absolutas refiriendo todos los términos al sistema móvil S_1 en lugar de al sistema fijo:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P/S1} = \vec{a}_{B/S1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}} \tag{69}$$

- ⇨ Puede concluirse que los campos de velocidades y aceleraciones relativas son consecuencia del movimiento general del S_2 visto desde el sistema S_1 y por lo tanto pueden obtenerse sumando a la traslación del punto B, la rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto.

$$\boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{P/S1} \\ \vec{a}_{P/S1}\end{matrix}} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{v}_{B/S1} \\ \vec{a}_{B/S1}\end{matrix}} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix}\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} \\ \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{BP}\end{matrix}}$$

Movimiento **relativo a S_1**	Traslación de B	Rotación alrededor de B

4.3.3. Cálculo de la aceleración angular absoluta de un sólido rígido

En el apartado anterior se ha demostrado que partiendo del movimiento relativo entre dos sólidos, puede obtenerse la siguiente relación entre las velocidades angulares absolutas:

$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1}} \tag{70}$$

Derivando esta expresión:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{XYZ} \tag{71}$$

Para derivar correctamente la expresión (71), debe tenerse en cuenta que los vectores $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ definen las velocidades angulares respecto del sistema fijo y que por lo tanto su derivada es directa. Sin embargo, el término $\vec{\omega}_{2/1}$ indica la velocidad angular relativa del S_1 respecto S_2, está referida al sistema S_1que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}_1$ y por lo tanto debe derivarse aplicando la ley de Boure:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \left(\frac{d\vec{\omega}_{2/1}}{dt}\right)_{X_2Y_2Z_2} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} \tag{72}$$

Sustituimos ahora el valor de $\vec{\omega}_{2/1}$obtenido en la expresión (70), se obtiene la siguiente expresión, en la que,$\vec{\alpha}_{2/1}$indica la aceleración relativa del S_2 respecto del S_1:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \tag{73}$$

Y operando se obtiene la expresión que relaciona las aceleraciones absolutas de los dos sólidos. El término $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$ se denomina aceleración complementaria de Resal:

$$\boxed{\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2} \tag{74}$$