1. Kapitulua

Eredu linealak eta ebazpide grafikoa

Ikerkuntza Operatiboaren barnean programazio lineala arlo garrantzitsua da. Teknika matematiko horretako metodoek murrizketak dituzten optimizazio-linealeko problemen soluzio optimoa lortzea ahalbidetzen dute. Horrelako problemak praktikan kontestu desberdinetan sortzen dira, mugatuak diren baliabideak zenbait jardueren artean banatu behar direnean. Asko dira programazio linealaren bidez adieraziak eta ebatziak izan daitezkeen egoerak, hala nola beharrei baliabideak esleitzea, ekoizpenaren plangintza egitea, ekoiztutako produktuen garraioa antolatzea iturburuetatik helburuetara eramateko, nahaste-problemak etab.

Programazio linealak eredu matematiko lineal bat erabiltzen du ebatzi beharreko problema adierazteko. *Lineal* adjektiboa erabiltzen da ereduaren funtzio guztiek izaera lineala dutelako.

1.1 Eredu lineala

Problema lineal batean funtzio lineal bat optimizatu (maximizatu edo minimizatu) behar da, problemaren aldagaiek inekuazio linealen sistema bat bete behar dutelarik. Honelakoa da eredu lineala:

$$\text{opt} \;\; z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1.1}$$

hauen mende

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\leq}{\geq} \mathbf{b} \tag{1.2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.3}$$

Optimizatu beharreko funtzio lineala (1.1) da eta *helburu funtzioa* esaten zaio; problemaren aldagaiek bete beharreko inekuazio linealen sistema (1.2) da eta *murrizketa* esaten zaie, eta (1.3) *ez-negatibotasunaren murrizketak* dira.

Eredu linealean agertzen diren elementuak ondokoak dira.

- $\mathbf{x}$ bektorea *erabaki-aldagaien bektorea* da, eta n osagai ditu.
- $\mathbf{c}^T$ bektorea *prezio-bektorea* edo *kostu-bektorea* da, eta n osagai ditu.
- $\mathbf{b}$ bektorea *baliabide-bektorea* da, eta m osagai ditu.
- $\mathbf{A}$ matrizea *koefiziente teknologikoen matrizea* da, eta m errenkada eta n zutabe ditu. Matrizeko a_{ij} elementu bakoitzak $j, \;\; j = 1, \ldots, n$ jarduera unitate bat egiteko behar den $i, \;\; i = 1, \ldots, m$ baliabidearen unitate kopurua adierazten du.

Eredu linealean $\mathbf{c}^T$, $\mathbf{b}$ eta $\mathbf{A}$ parametro ezagunak dira; ez ordea $\mathbf{x}$ bektorea. Hain zuzen ere, $\mathbf{b}$ bektoreko baliabideak modu optimoan esleituak izateko, $\mathbf{x}$ erabaki-aldagaien balioak aurkitzean datza problema.

1.2 Eredu lineala idazteko formak

Aurreko atalean definitutako eredu lineala forma desberdinetan adierazia izan daiteke.

1. Bektoreen tamaina eta koefiziente teknologikoen matrizearena kontuan hartuz,

$$
\begin{array}{rl}
\text{opt } z & = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{hauen mende} & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \substack{\leq \\ = \\ >} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \substack{\leq \\ = \\ >} b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & \;\; \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \substack{\leq \\ = \\ >} b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n & \geq 0
\end{array}
$$

2. Matrize-forman.

$$\text{opt } z = (c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

hauen mende

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T$$

3. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bektoreak $\mathbf{A}$ matrizearen zutabeak izanik,

$$\begin{aligned} \text{opt } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{hauen mende} & \\ \mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n &\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} \mathbf{b} \\ x_j \geq 0\ ,\ j &= 1, \ldots, n \end{aligned}$$

1.3 Eredu lineala sortzen

Sistema erreal bat programazio linealeko teknikak erabiliz aztertu nahi denean, sistema adieraziko duen eredua sortzea da eman behar den lehen urratsa. Eredu lineala sortzea urrats garrantzitsua da, programazio linealeko tekniken bidez kalkulatuko den soluzio optimoa eraikitako eredu lineal horren mende baitago. Dena den, eredua eraikitzea urrats zaila izan daiteke, horretarako diseinatutako metodo edo erregela zehatzik ez dagoelako; ereduak eraikiz ikasten da ereduak eraikitzen. Horretarako lagungarri izan daiteke zenbait adibide praktiko aztertzea.

1. adibidea. Garraio-problema

Enpresa batek bizikletak ekoizten ditu H_1, H_2 eta H_3 hirietan dituen hiru sukurtsaletan. Hiri horietako bakoitzean hilean 1000, 2100 eta 1500 bizikleta ekoizteko ahalmena dute, hurrenez hurren. Enpresak lau bezerorentzat egiten du lan, A, B, C eta D, eta bezero horiek hilero 800, 1100, 900 eta 1300 bizikleta erosteko eskaria egiten diote, hurrenez hurren.

Ondoko taulan bizikleta bakoitza garraiatzeak sortuko duen kostua zehazten da. Garraio-kostua bizikleta ekoitzia izan den herritik bezeroarengana iristeko dagoen distantziaren mende kalkulatua izan da.

	A	B	C	D
H_1	10	8	10	13
H_2	19	6	15	16
H_3	14	8	9	6

Bizikleten garraioa antolatzen lagunduko duen eredu lineala idatzi behar da. Ereduak enpresaren eskaintzen eta bezeroen eskarien informazioa jaso beharko ditu eta garraioa kostu minimoan egingo dela ziurtatu beharko du.

- **Erabaki-aldagaiak**.

  x_{ij}: H_i hiritik j bezeroarengana hilero garraiatuko den bizikleta kopurua, $i = 1, 2, 3$, $j = A, B, C, D$.

- **Helburu funtzioa**. Garraio-kostua minimizatzea.

$$\min\ z = 10x_{1A} + 8x_{1B} + 10x_{1C} + 13x_{1D} + 19x_{2A} + 6x_{2B} + 15x_{2C} + \\ +16x_{2D} + 14x_{3A} + 8x_{3B} + 9x_{3C} + 6x_{3D}$$

- **Murrizketak**. Sukurtsaletako eskaintza eta bezeroen eskaria.

  – Hirietako sukurtsalen ekoizpen-ahalmena ez da gainditu behar.

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} &\leq 1000 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} &\leq 2100 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &\leq 1500 \end{aligned}$$

– Bezeroen eskaria zerbitzatu egin behar da.

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &\geq 800 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} &\geq 1100 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &\geq 900 \\ x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} &\geq 1300 \end{aligned}$$

– **Ez-negatibotasunaren murrizketa**. Aldagaiek balio positiboak hartu behar dituzte, $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B, C, D$.

2. adibidea. Ekoizpen-problema

Enpresa batek hiru pieza mota ekoizten ditu, P_1, P_2 eta P_3, eta ekoizpenerako A, B eta C makinak erabiltzen ditu. Makinak erabilgarri dauden ordu kopurua eta makina bakoitzaren ekoizpen-kostua ondoko taulan zehazten dira.

	Erabilgarritasuna (ordu/aste)	Ekoizpen-kostua (euro/ordu)
A makina	1000	6
B makina	1000	4
C makina	1000	5

Pieza bakoitza ekoizteko makina bakoitzean egon beharko duen ordu kopurua zehazten da ondoko taulan:

	P_1	P_2	P_3
A makina	1	2	3
B makina	2	3	1
C makina	1	1	1

Piezen ekoizpenean M_1 eta M_2 materialak erabiliko dira. Material horiek kantitate mugatuan daude, 1000 kg eta 1200 kg, hurrenez hurren. Ondoko taulan zehazten da pieza unitate bakoitzaren ekoizpenean behar den material kantitatea.

Pieza	M_1 (kg/pieza)	M_2 (kg/pieza)
P_1	1	2
P_2	1	3
P_3	3	1

M_1 materialaren kostua 1.5 eurokoa da kiloko, eta M_2 materialarena 3 eurokoa. Piezak ekoitziak izan direnean, salduak izango dira 50, 56 eta 70 eurotan, hurrenez-hurren. Enpresak asteroko ekoizpena antolatu nahi du irabazi maximoa lortzeko.

- **Erabaki-aldagaiak**.

  x_j: enpresak astero ekoitziko duen P_j, $j = 1, 2, 3$, pieza kopurua.

- **Helburu funtzioa**. Irabazia maximizatzea.

  * Salmenta-prezioa $= 50x_1 + 56x_2 + 70x_3$
  * Materialaren-kostua = $(1 \times 1.5 + 2 \times 3)x_1 + (1 \times 1.5 + 3 \times 3)x_2 + (3 \times 1.5 + 1 \times 3)x_3$
  * Ekoizpen-kostua = $(1 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 5)x_1 + (2 \times 6 + 3 \times 4 + 1 \times 5)x_2 + (3 \times 6 + 1 \times 4 + 1 \times 5)x_3$

  Irabazia honela kalkulatuko da:

  ”Salmenta-prezioa” $-$ “Materialaren kostua” $-$ “Ekoizpen-kostua”

  Kalkuluak eginez ereduaren helburu funtzioa lortuko da.

  $$\max\ z = 23.5x_1 + 16.5x_2 + 35.5x_3$$

- **Murrizketak**. Erabilgarri dauden makina-ordu kopuruek eta material kantitateak murrizten dute ekoizpena.

  $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \quad (A \text{ makina}) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 1000 \quad (B \text{ makina}) \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1000 \quad (C \text{ makina}) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 1000 \quad (M_1 \text{ materiala}) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 1200 \quad (M_2 \text{ materiala}) \end{aligned}$$

- **Ez-negatibotasunaren murrizketa**. Pieza kopuru positiboa ekoitziko da, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

3. adibidea. Nahasketen problema

Errefinategi batean petrolio-gordina tratatu eta hiru osagaitan banatzen da, ondoren, osagai horiek nahasiz A eta B gasolinak lortzeko. Gasolinen ekoizpenerako erabilgarri dagoen osagai bakoitzeko upel kopurua eta upel bakoitzaren kostua eurotan honako taulan ematen dira:

	Upel kopurua	Kostua
O_1 osagaia	2000	10
O_2 osagaia	3000	8
O_3 osagaia	1000	12

A eta B gasolinen kalitate-maila egokia izan dadin, hiru osagaiak honela nahasi behar dira.

- A gasolinak duen O_1 osagaiaren kopurua gutxienez $\%30$ da, eta O_2 osagaia gutxienez $\%20$; O_3 osagaia, aldiz, gehienez $\%30$ izango du.

- B gasolinak bere konposizioan osagai bakoitzetik gutxienez $\%25$ izan behar du.

Hiru osagaiak nahasiz lortuko diren A eta B gasolinak upeletan salduko dira, 40 eta 35eko salmenta-prezioan, hurrenez hurren. Gasolinen ekoizpena antolatzea da helburua, ekoizpenetik lortutako irabaziak maximizatzeko.

- **Erabaki-aldagaiak**.

  x_{ij}: j gasolina sortzeko O_i osagai bakoitzetik erabiliko den upel kopurua, $j = A, B$, $i = 1, 2, 3$.

- **Helburu funtzioa**. Irabazia maximizatzea.

  * Gasolinen prezioa = $40(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 35(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B})$
  * Osagaien kostua = $10(x_{1A} + x_{1B}) + 8(x_{2A} + x_{2B}) + 12(x_{3A} + x_{3B})$

Irabazia kalkulatzeko "Gasolinen prezioa" $-$ "Osagaien kostua" egin behar da, eta honako helburu funtzioa lortuko da:

$$\max\ z = 30x_{1A} + 32x_{2A} + 28x_{3A} + 25x_{1B} + 27x_{2B} + 23x_{3B}$$

- **Murrizketak**. Hiru osagaietatik erabilgarri dauden upel kopuruak eta gasolina bakoitzaren kalitatea bermatuko duten konposiziorako murrizketek ekoizpena baldintzatuko dute.
  - Osagaien kantitateei dagozkien murrizketak.

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} &\leq 2000 \quad (O_1 \text{ osagaia}) \\ x_{2A} + x_{2B} &\leq 3000 \quad (O_2 \text{ osagaia}) \\ x_{3A} + x_{3B} &\leq 1000 \quad (O_3 \text{ osagaia}) \end{aligned}$$

  - Gasolinen konposizioa.

$$\begin{aligned} x_{1A} &\geq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\ x_{2A} &\geq \frac{20}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\ x_{3A} &\leq \frac{30}{100}(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) \\ x_{1B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\ x_{2B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\ x_{3B} &\geq \frac{25}{100}(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \end{aligned}$$

- **Ez-negatibotasunaren murrizketa**. $x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = A, B$

4. adibidea. Dieta-problema

Nutrizio-zentro batean A, B, C eta D bitaminak kantitate egokian izango dituen dieta prestatzen ari dira. Dietak bitamina mota bakoitzetik kantitate hauek ziurtatu behar ditu: A bitaminatik gutxienez 25 miligramo, B bitaminatik 25 eta 30 miligramo artean, C bitaminatik gutxienez 22 miligramo eta D bitaminatik gehienez 17 miligramo.

Bitamina horiek lau elikagaitatik lortzen dira. Ondoko taulan agertzen da elikagai gramo bakoitzean dagoen bitaminen miligramo kopurua eta elikagai gramoaren kostua.

	Bitaminak (mg/g)				Kostua
	A	B	C	D	(euro/g)
E_1 elikagaia	2	1	0	1	0.014
E_2 elikagaia	1	2	1	2	0.009
E_3 elikagaia	1	0	2	0	0.013
E_4 elikagaia	1	2	1	1	0.016

Beharrezkoak diren bitamina kantitateak bermatuko dituen kostu minimoko dieta diseinatu nahi da. Honela idatz daiteke problema adierazten duen eredu lineala.

- **Erabaki-aldagaiak.**

  x_j: dietak izango duen E_j elikagaiaren gramo kantitatea, $j = 1, 2, 3, 4$.

- **Helburu funtzioa**. Dietaren kostua minimizatzea.

$$\text{min } z = 0.014x_1 + 0.009x_2 + 0.013x_3 + 0.016x_4$$

- **Murrizketak**. Dietak bitamina kantitate egokiak bermatu behar ditu.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 25 \quad (A \text{ bitamina}) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 &\geq 25 \quad (B \text{ bitamina}) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 &\leq 30 \quad (B \text{ bitamina}) \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 22 \quad (C \text{ bitamina}) \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 17 \quad (D \text{ bitamina}) \end{aligned}$$

- **Ez-negatibotasunaren murrizketa**. $x_j \geq 0, \; j = 1, 2, 3, 4$

5. adibidea. Mozketa-problema

Enpresa batean 5 metroko zabalera eta 20 metroko luzera duten paper-bobinak ekoizten dira. Bezeroengandik zabalera txikiagoko paper-bobinen eskariak jaso ohi direnez, eskatutako neurrietara moztu egin behar izaten dira. Datorren hilabeterako ondoko eskariak jaso dira:

Zabalera	Eskaria (bobinak)
3 m	100
2 m	100
1.5 m	300
1 m	150

Mozketa antolatu behar da 5 metroko zabalerako paper-bobina kopuru minimoa moztuz bezeroen eskariak zerbitzatzeko. Paper-bobinak bezeroek eskatutako zabaleretara mozteko aukera desberdinak daude. Honako taulan laburbiltzen dira 5 metroko zabalerako bobinak eskatutako zabaleretan mozteko dauden 7 aukerak:

Mozteko	Zabalera			
aukera	3m	2m	1.5m	1m
1	1	1	0	0
2	1	0	0	2
3	0	2	0	1
4	0	1	2	0
5	0	1	0	3
6	0	0	2	2
7	0	0	0	5

- **Erabaki-aldagaiak**.

  x_j: j mozteko aukeraren arabera moztutako paper-bobina kopurua, $j = 1, \ldots, 7$.

- **Helburu funtzioa**. Moztutako paper-bobina kopurua minimizatzea.

$$\min\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

- **Murrizketak**. Bezeroen eskariak zerbitzatu behar dira.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 &\geq 100 \\ 2x_4 + 2x_6 &\geq 300 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + 5x_7 &\geq 150 \end{aligned}$$

- **Ez-negatibotasunaren murrizketa**. $x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 7.$

5 metroko zabalerako paper-bobina moztean zentimetro batzuk alferrik galduko direla onartzen bada, mozketarako beste aukera batzuk defini daitezke. Mozketa egitean, gehienez 0.5 metroko paper-soberakina sortuko duten mozketarako aukerak ondoko taulakoak dira:

Mozteko aukera	Zabalera 3m	2m	1.5m	1m	Papera soberan
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0.5m
3	1	0	0	2	0
4	0	2	0	1	0
5	0	1	2	0	0
6	0	1	1	1	0.5m
7	0	1	0	3	0
8	0	0	3	0	0.5m
9	0	0	2	2	0
10	0	0	1	3	0.5m
11	0	0	0	5	0

Kasu honetan, paper-bobinak mozteko 11 aukera desberdin daude, eta aukera bakoitzaren arabera moztuko den paper-bobina kopurua adieraziko duen aldagai bana definituko dugu, hau da, 11 erabaki-aldagai. Aldagai horiekin honako eredu lineala planteatuko dugu:

$$\min \ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}$$

hauen mende

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 100 \\ x_1 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 100 \\ x_2 + 2x_5 + x_6 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} &\geq 300 \\ 2x_3 + x_4 + x_6 + 3x_7 + 2x_9 + 3x_{10} + 5x_{11} &\geq 150 \\ x_1, \ldots, x_{11} &\geq 0 \end{aligned}$$

1.4 Ebazpide grafikoa

Problema lineal guztiak grafikoki ebatzi ezin diren arren, guztiek badute interpretazio geometrikoa. Eredu linealen ebazpide grafikoa aztertzea interesgarria da programazio linealean garrantzitsuak diren kontzeptuak grafikoki ikus daitezkeelako, hala nola soluzio baten hobekuntza, soluzio motak, mutur-puntuak.

Inekuazio-sistemaren soluzioen multzoa ekuazio bakoitza berdintzaz marraztuz eta ondoren inekuazioak adierazitako espazioerdia erabakiz lortzen da. Helburu funtzioa paraleloak diren zuzenen familia bat da, zuzen bat z-ren balio bakoitzerako. Zuzen hori soluzioen multzoaren gainean desplazatuz, z-ren balioa optimizatu egiten da, eta optimoa lortuko da zuzena soluzioen multzoaren mugaraino iristen denean. Helburu funtzioaren balio optimoa beti soluzioen multzoaren erpin batean aurkitzen da.

Atal honetan, bi aldagaiko eredu lineal batzuren ebazpide grafikoa aztertuko dugu.

Adibidea. Soluzio optimo bakarra duen problema

Har dezagun ondoko eredu lineala:

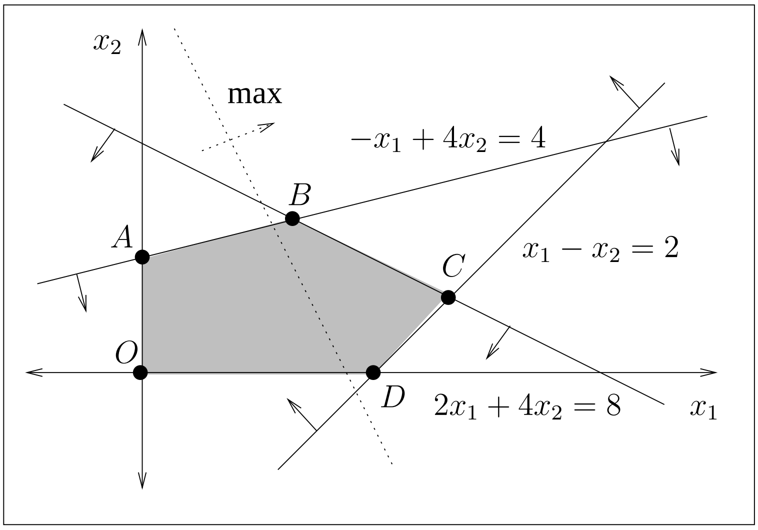
$$\max \ z = 6x_1 + 3x_2$$

hauen mende

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Murrizketek definitutako soluzioen multzoan helburu funtzioaren balioa maximizatuko duten x_1 eta x_2 aldagaien balioak aurkitzean datza problema.

Soluzioen multzoa koordenatu-sistema batean marraz daiteke. Ereduaren murrizketa bakoitza espazioerdi bat da. Adibidez, ereduaren lehenengo murrizketak definitutako espazioerdia grafikoki adierazteko $2x_1 + 4x_2 = 8$ zuzena marraztuko dugu. Zuzen horrek planoa bi espazioerditan banatzen du, eta horietako bat da murrizketari dagokiona, zuzena barne, murrizketak berdintza ere baduelako. Adierazpen grafikoan, gezien bidez erakusten da murrizketa bakoitzari dagokion espazioerdia. Zuzenak definitutako bi espazioerdien artean murrizketari zein dagokion erabakitzeko, planoko puntu bat hartu eta murrizketa betetzen duen egiaztatu besterik ez da egin behar. Ereduko murrizketa guztiak grafikoki adieraziz eta ez-negatibotasunaren murrizketak kontuan hartuz, problemaren soluzioen multzoa lortuko da.



Aurreko irudian margotutako eskualdea problemaren soluzioen multzoa da; eskualde horretan dauden puntuek problemaren murrizketa guztiak, ez-negatibotasunaren murrizketak barne, betetzen dituzte. $OABCD$ poligonoa multzo ganbila da.

Poligonoaren erpinak kalkula daitezke ekuazio-sistemak askatuz. O puntua koordenatu-sistemaren jatorria da. $A = (0,\ 1)$ puntua $-x_1 + 4x_2 = 4$ zuzenaren eta ordenatu ardatzaren arteko ebaki-puntua da. $D = (2,\ 0)$ puntua $x_1 - x_2 = 2$ zuzenaren eta absiza ardatzaren arteko ebaki-puntua da. $B = (\frac{4}{3},\ \frac{4}{3})$ puntua $-x_1 + 4x_2 = 4$ zuzenaren eta $2x_1 + 4x_2 = 8$ zuzenaren arteko ebaki-puntua da. $C = (\frac{8}{3},\ \frac{2}{3})$ puntua $x_1 - x_2 = 2$ zuzenaren eta $2x_1 + 4x_2 = 8$ zuzenaren arteko ebaki-puntua da.

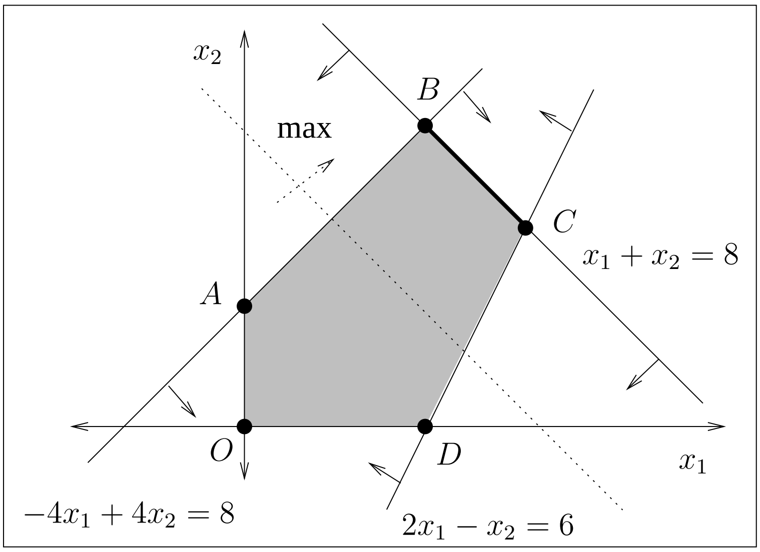
Helburu funtzioa soluzioen eskualdearen gainetik desplazatzen dugunean, koordenatu-sistemaren jatorritik urrunduz, z-ren balioa hazi egiten da. Desplazamendua eskualdearen mugaraino iritsi arte egin behar da z optimizatzeko. Horrela, egiazta daiteke problemaren soluzio optimoa C puntuan aurkitzen dela, eta helburu funtzioak $z^* = 18$ balio optimoa lortuko duela bertan.

Adibidea. Soluzio optimo anizkoitza duen problema.

Har dezagun ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + x_2 \\ \text{hauen mende} \qquad\qquad \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problemari dagokion soluzioen multzoa grafikoki adierazteko aurreko adibidean azaldu bezala egiten da. Oraingoan, problemaren soluzioen multzoa grafikoan margotuta ikusten den $OABCD$ poligonoa da. $B = (3, 5)$ puntua $x_1 + x_2 = 8$ zuzenaren eta $-4x_1 + 4x_2 = 8$ zuzenaren arteko ebaki-puntua da. $C = (\frac{14}{3}, \frac{10}{3})$ puntua $x_1 + x_2 = 8$ zuzenaren eta $2x_1 - x_2 = 6$ zuzenaren arteko ebaki-puntua da.



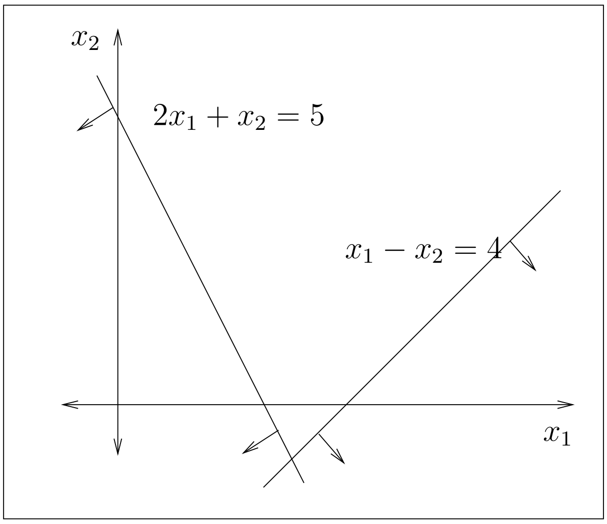
Helburu funtzioa soluzioen eskualdearen gainetik mugaraino iritsi arte desplazatuz optimora iristea lortuko da. B eta C erpinak eta BC segmentuko puntuak problemaren soluzio optimoak dira. Helburu funtzioaren balio optimoa $z^* = 8$ da.

Adibidea. Problema bideraezina.

Har dezagun ondoko eredu lineala.

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= x_1 + x_2 \\
\text{hauen mende} & \\
2x_1 + x_2 &\leq 5 \\
x_1 - x_2 &\geq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problemaren murrizketa guztiak grafikoki marraztuz egiazta daiteke ez dagoela murrizketa guztiak betetzen dituen punturik. Hortaz, problemak ez du soluziorik; bideraezina da.

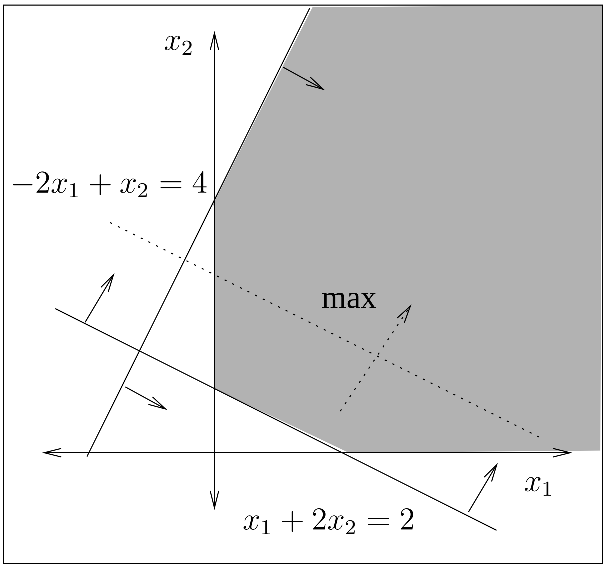


Adibidea. Soluzioen eskualde bornegabea. Soluzio bornegabea.

Har dezagun ondoko eredu lineala:

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} \qquad \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Grafikoan ikusten den bezala, soluzioen eskualdea bornegabea da, eta helburu funtzioa adierazten duen zuzena etengabe desplaza daiteke. Hortaz, problema honen soluzio optimoa bornegabea dela esaten da.

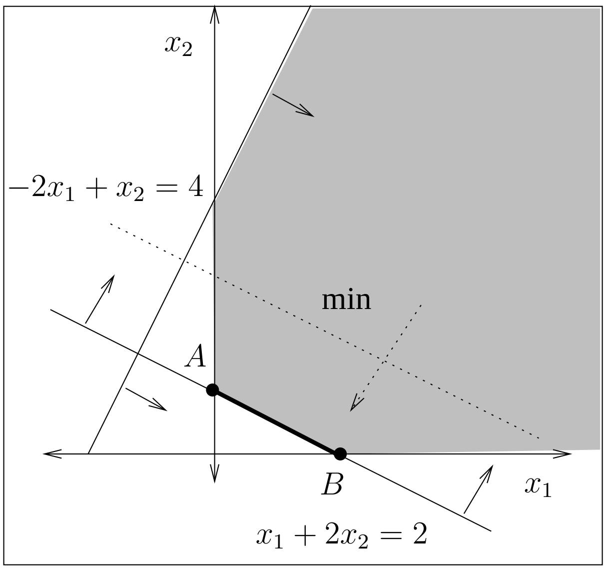


Adibidea. Soluzioen eskualde bornegabea. Soluzio bornatua.

Izan bedi honako eredu lineala:

$$\begin{aligned} \min\ z = x_1 + 2x_2 \\ \text{hauen mende} \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Adibide honetan, soluzioen multzoa bornegabea da, baina soluzio optimo bornatua aurki daiteke, helburu funtzioa soluzioen eskualdearen gainetik koordenatuardatzen jatorriratz desplazatuz mugara iritsi arte. Horrela, egiaztatu ahal izango dugu soluzio optimoak $A = (0, 1)$ puntua, $B = (2, 0)$ puntua eta AB segmentuko puntuak direla, eta balio optimoa $z^* = 2$ dela.



Eredu linealak ebazterakoan aurki ditzakegun soluzio mota guztiak ikusi ditugu adibideen bitartez. Soluzio mota bakoitza modu aljebraikoan identifikatuko duten baldintzak 2. Kapituluan aztertuko dira. Bertan, eredu linealak ebazteko erabiltzen den simplex algoritmoa aztertuko da.

A. Eranskinean espazioerdien eta multzo ganbilen definizio eta propietateak modu zehatzagoan azalduak daude. 2. Kapituluan frogatuko da eredu lineal baten soluzio optimoa soluzioen multzo ganbilaren mutur-puntu batean aurkitzen dela.