AUTOEBALUAZIOKO ARIKETA EBATZIAK

Lan egiteko prosezua. *Kurtsoko 7 gaietako ariketa zerrendatik ariketa bat edo bi aukeratu dira, eta hauen ebazpenak aurkezten dira dokumendu honetan. Ikasle bakoitzak ariketa hauen ebazpenak ikusi ondoren, hauek arretaz aztertu behar ditu, jadanik irakasleak proposatu duen* **Autoebaluazio txostena** *izeneko dokumendua osatuz (ariketa bakoitzeko bana).*

1 1go gaiko 2.ariketako iii) atala.

Ariketa 1. *Frogatu indukzio metodoa erabiliz ondoko adierazpena.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$.

Froga. *Froga dezagun adierazpena* $n = 1$ *baliorako:* $1.1! = 1 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ *(betetzen da).*

Suposa dezagun baieztapena egia dela $k \in \mathbb{N}$ *baliorako, hau da,* $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + k.k! = (k+1)! - 1$ *dela, eta ikus dezagun, baieztapena hori ere egia dela* $k+1$ *baliorako.*

$$[\mathbf{1.1! + 2.2! + 3.3!} + \ldots + \mathbf{k.k!}] + (k+1).(k+1)! = (\mathbf{k+1})! - \mathbf{1} + (k+1).(k+1)! =$$

$$(k+1)![1 + (k+1)] - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 = ((k+1)+1)! - 1,$$

eta honela baieztapena frogatuta dago ere, $k+1$ *kasurako. Ondorioz, esan genezake edozein* $n \in \mathbb{N}$*-rako hasierako baieztapena egia dela.*

2 2.gaiko 6.ariketa eta 2.gaiko 25.ariketa

Ariketa 2. *Izan bedi* A*,* 4*-ren multiploak diren zenbaki arrunten multzoa eta* $B \subset \mathbb{N}$*,* 4 *zenbakian bukatzen diren zenbakien multzoa. Frogatu* $A \nsubseteq B$ *eta* $B \nsubseteq A$ *direla.*

Froga. *Frogatzeko* $A \nsubseteq B$ *dela, nahikoa da kontradibide bat ematea; alegia,* $16 \in A$ *dago, baina* $16 \notin B$*. Bestalde, modu berean* $B \nsubseteq A$ *dela froga daiteke, zeren eta adibidez,* $14 \in B$ *dago, baina ordea* $14 \notin A$*.*

Ariketa 3. $\mathbb{Z}$*-n ondoko eran emanda dagoen* R *erlazioa definitzen da:* mRn *baldin eta soilik baldin* $m-n$ *bikoitia bada. Esan daiteke* R *baliokidetasun erlazioa dela? Zeintzuk osoak erlazionatuta daude* 2 *zenbakiarekin? Eta* 2008*-rekin? Eta* -11*-rekin?*

Froga. *Lehenengo eta behin R baliokidetasun erlazioa dela frogatzeko, R-k ondoko hiru propietateak betetzen dituela ikusi behar da:*

- *R erreflexiboa da: edozein $n \in \mathbb{Z}$-rako, nRn dago, $n - n = 0$ delako, eta 0 zenbaki bikoitia kontsideratzen dugulako.*

- *R simetrikoa da: edozein $m, n \in \mathbb{Z}$-rako, baldin eta mRn bada, hau da, $m - n$ bikoitia bada, $n - m = -(m - n)$ ere zenbaki oso bikoitia da, eta ondorioz nRm dugu.*

- *R iragankorra da: edozein $m, n, t \in \mathbb{Z}$ izanik, non mRn eta nRt badira, orduan $m - n = 2t_1$ eta $n - t = 2t_2$ dira, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ izanik. Beraz, $(m - n) + (n - t) = m - t = 2t_1 + 2t_2 = 2(t_1 + t_2)$ da, eta bereziki zenbaki bikoitia da, hau da, mRt dugu.*

Bestalde, 2-rekin erlazionatuta daudenak R bidez, 2-ren baliokidetasun klasea da, hau da, $\overline{2} = \{x \in \mathbb{Z} : xR2\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 2 = 2t, t \in \mathbb{Z}$ izanik$\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2 + 2t, t \in \mathbb{Z}$ izanik$\} = 2-renmultiploenmultzoa$. Eta 2008-ren baliokidetasun klasea da, $\overline{2008} = \{x \in \mathbb{Z} : xR2008\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 2008 = 2t, t \in \mathbb{Z}$ izanik$\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2008 + 2t, t \in \mathbb{Z}$ izanik$\}=$ 2-ren multiploen multzoa. Azkenik, -11-ren baliokidetasun klasea, zenbaki bakoitien multzoa da.

3 3.gaiko 9.ariketa

Ariketa 4. *ALELUYA hitzaren hizkiekin posible diren hitz guztiak osatzen ditugu. Zenbat daude? Horietatik, zenbat kontsonanteagatik hasten dira?*

Froga. *Har dezagun $E = \{A, L, E, L, U, Y, A\}$ multzoa. Kasu honetan A hizkia bitan agertzen da, eta baita ere L hizkia. Orduan, 7 elementu horiekin egin daitezkeen ordenaketa posible desberdin guztiak, non horietariko bi 2 aldiz agertzen diren eta gainontzeko guztiak bakarrik batetan, ondokoa da*

$$PR_7^{2,2,1,1,1} = \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = \frac{7!}{2!2!}.$$

Bestalde, kontsonantez hasteko aukerak ondokoak dira: L-z hastea edo Y-koz hastea.

L-z hasteko kasuan, orain 6 hizkirekin non A bi aldiz ager daitekeen eta beste guztiak batetan baino ez, egin daitekeen ordenaketa posible desberdin guztiak

$$PR_6^{2,1,1,1,1} = \frac{6!}{2!1!1!1!1!} = \frac{6!}{2!} \text{ dira,}$$

eta Y-z hasteko kasuan, nola A bitan eta L ere bitan ager daitezkeen eta gainontzekoa batetan bakarrik, oduan egin daitekeen ordenaketa posible desberdin guztiak

$$PR_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = \frac{6!}{2!2!} \text{ dira.}$$

4 4.gaiko 5.ariketa

Ariketa 5. *Frogatu edozein zenbaki oso bakoitia, $4k+1$ edo $4k-1$ motatakoa dela.*

Froga. *Har dezagun edozein m zenbaki oso bakoitia eta egin dezagun honen zatiketa 4 zenbakiagatik. Zatiketa algoritmoagatik badakigu m-k ondoko adierazpena onartzen duela: $m = 4.k + r$, non $k, r \in \mathbb{Z}$ eta $0 \leq r < 4$ diren. Beraz ondoko aukerak ditugu,*

- $m = 4.k + 0 = 4k$, *eta hau ezinezkoa da, zeren eta hipotesiagatik m bakoitia da.*
- $m = 4.k + 1$
- $m = 4.k + 2 = 2(2.k + 1)$ *eta hau ere ezinezkoa da, zeren eta hipotesiagatik m bakoitia da.*
- $m = 4.k + 3 = 4.k + (4 - 1) = 4(k + 1) - 1 = 4.k' - 1$, *$k'$ zenbaki osoa izanik.*

5 5.gaiko 2.ariketa

Ariketa 6. *Frogatu era hamartarrean idatzita dagoen edozein $n \in \mathbb{N}$ zenbaki baten digituen batura n-rekin kongruentea dela 9 moduluarekiko. Ondorioztatu* 9*-gatik zatigarria izatearen irizpide bat.*

Froga. *Idatzi n zenbaki arrunta era hamartarrean ondoko eran,*

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_k \cdot 10^k,$$

non $a_i \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_i \leq 9$ tartean dauden. Nola $10 \equiv 1(mod\ 9)$, kongruentzien berreketaren propietateagatik, edozein i zenbaki arruntarentzako, jakina da $10^i \equiv 1^i = 1(mod\ 9)$, eta ondorioz edozein i zenbaki arruntarentzako, $a_i \cdot 10^i \equiv a_i.1 = a_i(mod\ 9)$. Beraz, $n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n(mod\ 9)$.

Ondorioz, zenbaki arrunta bat 9 zenbakiagatik zatigarria izango da baldin eta soilik baldin zenbaki arrunta horren digituen batura 9 zenbakiagatik zatigarria bada.

6 6.gaiko 9.ariketa

Ariketa 7. *Aurkitu $f(x) = x^6 + 10x^3 - 12x + 5$ polinomioaren erro anizkoitz guztiak eta erabili informazio hori $f(x)$ irreduzibleen biderkadura gisa faktorizatzeko $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$ gorputzen gainean.*

Froga. *Jakina da $f(x)$ polinomio baten erro anizkoitza bat, $f(x)$ eta $f'(x)$-ren erro komuna izan behar duela. Bestalde, $f(x)$ eta $f(x)$-ren deribatu polinomioaren erro komunak, $(f(x), f'(x))$, hau da, $f(x)$ eta $f'(x)$ polinomio biren zatitzaile komunetako haundienaren erroak izan behar dute. Beraz, lehenengo eta behin, kalkula dezagun zein den $(f(x), f'(x)) = zkh(f(x), f'(x)) = (x^6 + 10x^3 - 12x + 5, 6x^5 + 30x^2 - 12)$.*

Euklidesen algoritmoa aplikatuz, $(x^6 + 10x^3 - 12x + 5, 6x^5 + 30x^2 - 12) = (6x^5 + 30x^2 - 12, 5x^3 - 10x + 5) = (5x^3 - 10x + 5, 24x^2 + 24x - 24) = (24x^2 + 24x - 24, 0) = x^2 + x - 1$.

Ondoren, kalkula dezagun zeintzuk diren $x^2 + x - 1$ polinomioaren erroak. Bigarren mailako ekuazio hau askatuz, $\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ eta $\alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ erroak lortzen dira. Orain, nola α_1 eta $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $f(x)$ polinomioaren erro anizkoitzak diren, orduan gutxienez, $(x - \alpha_1)^2 \mid f(x)$, eta baita ere $(x - \alpha_2)^2 \mid f(x)$. Bereziki, $(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_1)^2 = (x^2 + x - 1)^2 \mid f(x)$.

Orain, zatiketa algoritmoa aplikatuz, kalkulatzen dugu $f(x)$ zati $(x^2 + x - 1)^2$ polinomioa, $f(x) = (x^2 + x - 1)^2 (x^2 - 2x + 5)$ deskonposaketa lortuz. Azkenik, bigarren mailako $(x^2 - 2x + 5)$ ekuazioak ez dituela erro errealik froga daiketeenez, jadanik aurkituta ditugu $f(x)$ polinomioaren erro anizkoitza erreal guztiak, alegia, α_1 eta α_1, hauen anizkoiztasunak bikoak izanik, hurrenez hurren.

7 7.gaiko 4.ariketa

Ariketa 8. *Aurkitu ondoko zenbaki konplexuen moduluak eta argumenduak: $\frac{1+i}{1-i}$ eta $(1 + i)(2i)$.*

Froga.

- *Lehenengo eta behin idatz dezagun $\frac{1+i}{1-i}$ zenbaki konplexua era binomikoan. Horretarako, bider dezagun hasierako zenbaki konplexuaren izendatzailea eta zenbakitzailea $(1-i)$-ren konjokatuagatik, hau da, $(1+i)$-gatik. $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$, eta argi dago honen modulua $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, eta argumendua $\theta = \pi/2$ angelukoa direla.*

- *$(1+i)(2i) = 2i - 2 = -2 + 2i$ zenbakiaren modulua $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, eta argumendua $\theta = arctang(2/-2) = arctang(-1) = 135$ angelukoa dira.*