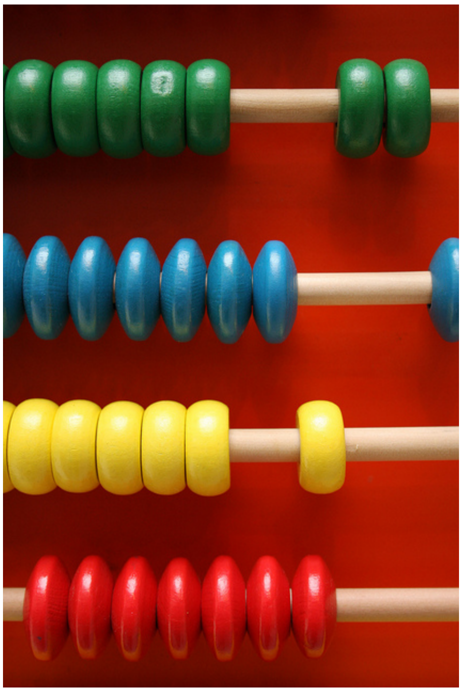
MATEMATIKARAKO SARRERA

OCW 2015



Mathieu Jarry iturria: Flickr CC-BY-NC-ND-2.0
https://www.flickr.com/photos/impactmatt/4581758027

Leire Legarreta Solaguren
EHU-ko Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Matematika Saila

1 GAIA: LENGOAIA MATEMATIKOA

Definizioak, notazioak, teoremak eta garapenak. Indukzio eta absurdura eramanez egindako frogak.

1 Hasierako kontzeptuak

Logikan eta matematikan, axioma bat, lengoaia formal batetan ondo egituratuta eta frogarik gabe onartzen den, eta beste formula batzuk frogatzeko abia puntua den adierazpen bat edo formula bat da. Ohikoa denez, axiomak beste formula batzuen artetik aukeratzen dira, "egi nabariak" direlako, eta nahi ditugun beste formula horietatik ondorioztatzen direlako. Baina, teoriko guztiak ez daude hurbiltasun honekin ados. Matematikan, axioma bat ez da beti egi nabari bat, baizik eta, ondo egituratuta dagoen eta ondorio batetara heltzeko dedukzio batetan erabilitako formula bat baino. Logikan eta matematikan, hipotesi bat, baliogarriak diren argudioen bidez, tesis baten egiaztapena frogatzeko abia puntua den adierazpena da.

Definizioa, gauza baten edo kontzeptu baten propietateen aitormena, edo baita, gai baten eta gai horren esanahiaren arteko baliokidetasunaren aitormena izan daiteke. Gai bat eta bere esanahia ez dira beti elkarrekiko baztertzen, ezta ere ez dira baliokideak, baizik eta osagarriak dira.

Teorema, axioma batetatik edo arinago frogatuak izan diren emaitzetatik abiatuta, modu logiko batetan, froga daitekeen proposizio edo emaitza bat da. Matematika arloa, nortasun propio batzuk jarraitzen dituen lengoaia sinboliko formal batetan oinarritzen da.

Sinboloek, kontzeptu bat, operaketa bat, edo arau batzuk jarraituz entitate matematiko bat adierazten dute. Sinbolo horiek, ez dira laburdurak, baizik eta balio propio eta autonomoa duten entitateak.

2 Sinbolo batzuk

Ondoren, gure garapen matematikoetan erabiliko ditugun oinarrizko sinbolo batzuk deskribatuko ditugu:

Multzo teorian

Izan bitez x elementua eta A, B bi multzo.

Operaketa	Notazioa	Nola irakurtzen den
partekotasuna	$x \in A$	x barne A
partekotasuna	$A \subset B; A \subseteq B$	A, B-ren barne dago ; A, B-ren barne edo berdina da

Sinbolo baten gainean marra okertu bat agertzen bada, sinboloaren esanahia desestatzen da. Adibidez, $x \notin A$-k, x ez dagoela A-ren barne esan nahi du.

Adierazpenak

Operaketa	Notazioa	Nola irakurtzen den
Berdintza	$x = y$	x, y-ren berdina da
Txikiagoa	$x < y$	x, y baino txikiagoa da
Haundiagoa	$x > y$	x, y baino haundiagoa da
Antzekoa	$x \approx y$	x, y-ren antzekoa da

Oinarrizko operadoreak

Oinarrizkoenak diren operadore logikoak, konjokazioa, disjuntzioa eta ukapena dira. Izan bitez, p eta q bi proposizio.

Operaketa	Notazioa	Nola irakurtzen den
Ezetza	$\urcorner p$	Ez p
Konjokazioa	$p \wedge q$	p eta q
Disjuntzioa	$p \vee q$	p edo q

Ondorioztapena

Operadore matematikoen konbinazio oso erabilgarri bat, ondorioztapena da. $p \implies q$ idazten da. “p-k, q ondorioztatzen du” esan nahi du. Gainera baldin eta $p \implies q$, eta $q \implies p$ badira, orduan “p-k, q ondorioztatzen du eta p, q-gatik ondorioztatua dela” irakurtzen da, edo beste modu batetan esanda, “p baldin eta soilik baldin q”.

Zenbatzaileak

Zenbakitzaileak beharrezkoak dira, esateko noiz aitorpen bat egia den ala ez. Oinarrizko hiru zenbatzaile existitzen dira: zenbatzaile unibertsala, zenbatzaile existentziala eta, bakartasunaren marka duen zenbatzaile existentziala.

Operaketa	Notazioa	Nola irakurtzen den
Unibertsala	$\forall x..$	Edozein x-rentzat
Existentziala	$\exists x..$	Behintzat x bat existitzen da
Bakartasunaren marka duena	$\exists! x$	x bakarra existitzen da

3 Froga matematikoa

Ondoren, froga matematikoaren ideia garatuko dugu.

Zertan datza froga matematiko bat? Egia den R edo p proposizio batetik abiatuta, eta aurreko logikako gai teknikoak erabiliz, S edo q proposizioa egia dela frogatzean datza. Hau da, "baldin eta p orduan q", $p \Longrightarrow q$ bidez idazten dena. Hasieratik, p emanda dela suposatzen da, ondoren, $p \Longrightarrow p_1, p_1 \Longrightarrow p_2, \ldots, \ldots, p_n \Longrightarrow q$ motako proposizioen kate bat eraikitzen da, non proposizio bakoitza, aurretik emandako hipotesi bat, edo jadanik frogatutako teorema bat diren. Kate honetan, $p_n \Longrightarrow q$ proposiziora heltzen garen heinean, q ondorioztatzen da. Ondoren, ikus ditzagun froga matematikoetarako gehien erabiltzen diren metodoak:

(i) Froga zuzena edo ondorioztapena bidezko froga

(ii) Froga ez zuzena

(iii) Kontradibidea bidezko froga

(iv) Errekurrentziazko edo indukziozko froga

Froga zuzena edo ondorioztapena bidezko froga: baldin eta p proposizioa eta $p \Longrightarrow q$ ondorioztapena egiak badira, orduan q egia da.

Froga ez zuzena. Bi motako frogak bereizten dira: kontraposiziozko froga eta kontradiziozko edo absurdura eramanez egindako froga. Froga ez zuzeneko lehenengo motakoa, kontraposiziozko froga deitzen da. Bere izenak adierazten duen bezala, lehenengo motatako froga hori, "baldin eta p orduan q" motako teorema bat frogatzea, bere kontrakoa, hau da, $\neg q \Longrightarrow \neg p$ frogatzean datza. Kasu honetan, $\neg q$-tik $\neg p$ ondorioztatzen duen proposizioen kate bat eraikitzen da.

t teorema baten froga ez zuzeneko bigarren metodoa, t-ren egia frogatzea, **bere gezurraren ukapena ezartzean datza**, hau da, frogatzen dena zera da, t ukatzea, hau da, $\neg t$-k eta honekin, $r \wedge \neg r$ motako kontraesan bat ondorioztatzen duena. Metodo hau, kontradiziozko edo absurdura eramanez egindako froga deitzen da. Baldin eta frogatzen bada, $\urcorner t$-k mota honetako kontraesan bat ondorioztatzen dela, hau da, r proposizioren batetarako, $\urcorner t \implies (r \wedge \urcorner r)$ proposizioaren egiaztapena ezartzen bada, orduan, kontutan harturik, $r \wedge \urcorner r$ ez dela egia, $\urcorner t$ ere faltsua dela ondorioztatzen da, eta ondorioz, t egiazkoa dela dugu.

Adibidea. *Baldin eta S zenbaki lehenen multzoa bada, orduan S multzo infinitua da. ($p \implies q$).*

Froga 3.1. *Demagun aurreko emaitza ez dela egia, hau da, demagun S, zenbaki lehenen multzoa dela eta multzo hori finitua dela. ($p \wedge \urcorner q$). Jar dezagun $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. S multzo finitua denez, S-ko zenbaki lehen guztien biderkadura $p_1, p_2, \ldots, p_k$ kalkula daiteke, eta $b = (p_1.p_2 \ldots p_k) + 1$ zenbakia eraiki daiteke ere. Orduan, existitzen da p' zenbaki lehen bat, b zenbakia zatitzen duena. (r). Nola p' zenbaki lehena den, eta S multzoa zenbaki lehen guztietaz osatuta dagoenez, p', S multzo barne dagoela ondorioztatzen da. Bestalde, S-ko zenbaki lehen batek ere ez du b zatitzen. Ondorioz, p'-k ez du b zenbakia zatitzen. ($\urcorner r$). Beraz, kontraesan batetara heldu gara $(r \wedge \urcorner r)$, zeren eta S multzoa ez dela infinitua ezartzen duen hipotesiarekin, kontraesan batetara heltzen gara, $(p \wedge \urcorner q) \implies (r \wedge \urcorner r)$, faltsua dena. Orduan, baldin eta S zenbaki lehenen multzoa bada, derrigorrez S multzo infinitua da.*

Froga kontradibidea bidez: kasu honetan, ondorioztapen baten ukapena frogatzeko kontradibide bat eman behar da, hau da, adibide bat zeinetan p eta $\urcorner q$ aldi berean, egiazkoak dira.

Adibidea. *Izan bedi p ondoko proposizioa: n, zenbaki osoa 6 eta 4-gatik zatigarria da. Izan bedi q ondoko proposizioa: n, zenbaki osoa 24-gatik zatigarria da. Egia al da p-k q ondorioztatzen duela? Erantzuna: Ez, zeren eta adibidez, 12 zenbakiak, aldi berean p eta $\urcorner q$ egiak direla adierazten du, 12 zenbakia 6 eta 4-gatik zatigarria delako, baina ez 24-gatik. Beraz, p-k ez du q ondorioztatzen.*

Froga errekurrentziaz edo indukzioz. Errekurrentziazko argudioak frogatzen duena zera da, edozein n zenbaki arruntarentzat (edo zenbaki arrunt batetik aurrera), n-k parte hartzen duen proposizioa beti dela egia. Horretarako, nahikoa da ezartzea, baieztapena egia dela 1 zenbaki arruntarentzat, eta baldin eta baieztapena egia bada n zenbaki arruntarentzat, orduan ere egia dela hurrengoko $n + 1$ zenbaki arruntarentzat.

Sinbolikoki, indukziozko proposizioa ondokoa da:

$$p(1) \wedge \forall k[p(k) \implies p(k+1)] \implies \forall n, p(n)$$

Baldin eta posible bada aurrekoa frogatzea, $p(1) \wedge \forall k[p(k) \implies p(k+1)]$ egia dela, orduan ondorioztatzen da $\forall n, p(n)$ ere egia dela.

Indukziozko frogan bi pasu daude:

(i) **Oinarrizko pausua**. Frogatzea $p(1)$ egia dela.

(ii) **Indukziozko pausua**. $\forall k[p(k) \Longrightarrow p(k+1)]$ frogatzea.

Adibidea. *Frogatu ondoko baieztapena:*

$$\forall n, 2^n \leq 2^{n+1}$$

(i) **Oinarrizko pausua**. *Frogatu $p(1)$ egia dela: $2^1 \leq 2^{1+1}$, zeren eta $2^1 = 2$, $2^{1+1} = 4$, eta $2 \leq 4$ dira.*

(ii) **Indukziozko pausua**. *Frogatu $\forall k[p(k) \Longrightarrow p(k+1)]$. Demagun $p(k)$ egia dela, hau da, demagun $2^k \leq 2^{k+1}$ egia dela (hipotesia). Froga dezagun orain $p(k+1)$ dela, hau da, froga dezagun $2^{k+1} \leq 2^{k+1+1} = 2^{k+2}$ dela. Honetarako, gure hipotesiaren desberdintzaren alde biak 2 zenbakiagatik biderkatzen ditugu, eta $2^k.2 \leq 2^{k+1}.2$ lortzen dugu, hau da, $2^{k+1} \leq 2^{k+2}$, nahi genuen bezala.*