
AZTERKETAREN EBAZPENA

1

ARIKETAK

1.- Lor ezazu $\mathbb{R}$ eta $\mathbb{C}$ gorputzen gainean, $f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ polinomioaren deskonposaketa irreduzibleen biderkadura moduan.

Erro arrazionala bilatzeko f $\mathbb{Z}$ gaineko polinomioa bihurtu behar dugu: $g(x) = 2f(x) = 2x^5 + x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$. g-ren erro arrazional posibleak: $\pm 1, \pm 1/2, \pm 2$. Ohartu $g(-1/2) = 0$ eta gainera $g(x) = (x+1/2)(2x^4+6x^2+4)$. Orduan $f(x) = (x+1/2)(x^4+3x^2+2)$ da. x^4+3x^2+2 polinomioaren erroak bilatzeko $y = x^2$ aldaketa egingo dugu eta orduan $y^2 + 3y + 2 = (y+1)(y+2)$. Guzti honekin hurrengo emaitzak ditugu:

$\mathbb{R}[x]$ eraztunean f-ren faktorizazioa: $f(x) = (x + 1/2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$

$\mathbb{C}[x]$ eraztunean f-ren faktoriazarioa: $f(x) = (x + 1/2)(x + i)(x - i)(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

2.- Froga ezazu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa badira, orduan A eta B antzekoak dira baldin eta soilik baldin polinomio karakteristiko berdina badute.

Teorian frogatuta dago A eta B antzekoak badira orduan polinomio karakteristiko berdina dutela. Beste inplikazioa frogatzeko ohartu A eta B matrize simetriko errealak direnez diagonalgarriak direla biak eta polinomio karakteristiko berdina dutenez forma diagonala berbera da.

3.- Izan bedi $\mathbb{R}^3$ ondorengo biderkadura eskalarrarekin: $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$. Lor itzazu h isometria (f-rekiko) guztiak non: $h(e_1) = (0, -1, 0)$ eta $h(e_2) = (1, 0, 1)$ diren.

Argi eta garbi $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ da. Hemendik oinarri ortonormal bateko bi bektore lortzen ditugu zuzenean: $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$. Hirugarren lortzeko ohiko metodoa erabiltzen dugu ($< e_1, e_2 >^{\perp}$ lortu eta $(1, 0, 1)$. Erraz ikusten da $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ oinarri ortonormala dela.

h guztiak lortzeko hurrengo erizpidea erabiliko dugu: h isometria da baldin eta soilik baldina $\{h(e_1), h(e_2), h(1, 0, 1)\}$ oinarri ortonormala bada. Beraz h guztiz definitzeko behar dugu $h(1, 0, 1) = (x, y, z)$. Noiz da $\{(0, -1, 0), (1, 0, 1), (x, y, z)\}$ multzoa oinarri ortonormala? Hurrengo baldintzak betezen direnean:

$$f((0, -1, 0), (1, 0, 1)) = 0, f((0, -1, 0), (x, y, z)) = 0 \text{ eta } f((1, 0, 1), (x, y, z)) = 0$$

eta gainera

$$f((0, -1, 0), (0, -1, 0)) = 1, f((1, 0, 1), (1, 0, 1)) = 1 \text{ eta } f((x, y, z), (x, y, z)) = 1$$

Hurrengo ekuazioak lortzen ditugu: $-y = 0$, $z = 0$ eta $(x - z)x + y^2 + (-x + 2z)z = 1$. Beraz $h(1, 0, 1)$ bektorarentzako aukerak hauek dira: $(-1, 0, 0), (1, 0, 0)$. Beraz bi isometria posible ditugu.

---

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^4)$ non:

$$M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Lor ezazu, posible baldin bada, oinarri bat non f-ri elkartutako matrizea Jordanen matrizea den. f diagonalgarria al da?

Lehenengo polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu: $\chi_f(x) = (x-3)^3(x+2)$. Beraz f badu elkartuta Jordanen matrize bat. Gainera Jordanen matrizea: $J = \begin{pmatrix} J(3) & 0 \\ 0 & J(-2) \end{pmatrix}$ eta oinarria: $\beta = \beta_{V^*(3)} \cup \beta_{V^*(-2)}$.

$V^*(3)$

$Ker(f-3id) = \langle (1,-2,1,0),(0,-1,0,1) \rangle$ eta $V^*(3) = Ker(f-3id)^2 = \langle (1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1) \rangle$. Alde batetik $J(3)$ lortuko dugu:

$$\begin{array}{llll} & & 0 & & \\ d_2 = 3 & & & 1 & \text{bloke } 2\times 2 \text{ ordenakoa} \\ & & 1 & & \\ d_1 = 2 & & & 1 & \text{bloke } 1\times 1 \text{ ordenakoa} \\ & & 2 & & \\ & 0 & & & \end{array}$$

Ondorioz $J(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ da.

Bestetik $\beta_{V^*(3)}$ lortuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 3$	$Ker(f-3id)^2$	v_1
$d_1 = 2$	$Ker(f-3id)$	$(f-3id)(v_1), v_2$

$v_1 \in Ker(f-3id)^2 - Ker(f-3id)$, adibidez, $v_1 = (0,1,0,0)$ eta orduan $(f-3id)(v_1) = (1,-1,1,-1)$ da. Bestalde $v_2 \in Ker(f-3id)$ eta ezin da izan aurrekoen konbinazio lineala, adibidez $v_2 = (0,-1,0,1)$. Orduan $\beta_{V^*(3)} = \{(1,-1,1,-1),(0,1,0,0),(0,-1,0,1)\}$ da.

$V^*(-2)$

$V^*(-2) = Ker(f+2id) = \langle (0,0,-1,1) \rangle$ da. Beraz $J(-2) = (-2)$ eta $\beta_{V^*(-2)} = \{(0,0,-1,1)\}$.

Datu guztiak bilduz:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

eta $\beta = \{(1,-1,1,-1),(0,1,0,0),(0,-1,0,1),(0,0,-1,1)\}$ da.

---

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

(ii) Kalkula ezazu f^{2004}.

Dakigunez, aurreko ataleko notazioa jarraituz, $M_\beta(f) = J$ da. Beraz, $M_\beta(f^{2004}) = (M_\beta(f))^{2004} = J^{2004}$. Ze itxura izango du J^{2004}? Ohartu $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + A$. Newtonen binomioa erabiltzerakoan (J banatzerakoan lortu ditugun matrizeak elkarren artean trukatzen dira) ohartu $A^2 = (0)$ dela. Ondorioz $J^{2004} = \binom{2004}{0} D^{2004} + \binom{2004}{1} D^{2003} A$.

(iii) Aurkitu, posible baldin bada, oinarri bat non f-ri elkartutako matrizea hurrengoa den:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A matrizearen Jordanen forma lortuko dugu eta f-ren Jordanen formarekin konparatu.

A-ren polinomio karakteristikoa: $\chi_A(x) = (x-3)^2(x+3)$. Beraz A kongruenteak da Jordanen matrize batekin. Gainera Jordanen matrizea: $J = \begin{pmatrix} J(3) & 0 \\ 0 & J(-2) \end{pmatrix}$. A matrizeari g endomorfismo bat egokituko diogu (ohiko moduan) eta horrela oinarria aurkitzeko $\beta = \beta_{V^*(3)} \cup \beta_{V^*(-2)}$ egin behar dugu. Oinarria erabiliz P aldaketa matrizea lortuko genuke: $P = M_\beta^{\beta_k}$.

$V^*(3)$

$Ker(g-3id) = \langle (1,5,0,0), (0,-1,-3/4,1) \rangle$ eta $V^*(3) = Ker(g-3id)^2 = \langle (1,5,0,0), (0,4/5,1,0), (0,8/5,0,1) \rangle$. Alde batetik $J(3)$ lortuko dugu:

$$\begin{array}{llll} & 0 & & \\ d_2 = 3 & & 1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\ & 1 & & \\ d_1 = 2 & & 1 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\ & 2 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Ondorioz $J(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ da.

Bestetik $\beta_{V^*(3)}$ lortuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 3$	$Ker(g-3id)^2$	v_1
$d_1 = 2$	$Ker(g-3id)$	$(f-3id)(v_1), v_2$

$v_1 \in Ker(g-3id)^2 - Ker(g-3id)$, adibidez, $v_1 = (0,4/5,1,0)$ eta orduan $(g-3id)(v_1) = (4/5,4,0,0)$ da. Bestalde $v_2 \in Ker(g-3id)$ eta ezin da izan aurrekoen konbinazio lineala, adibidez $v_2 = (0,1,-3/4,1)$. Orduan $\beta_{V^*(3)} = \{(4/5,4,0,0), (0,4/5,1,0), (0,1,-3/4,1)\}$ da.

$V^*(-2)$

$V^*(-2) = Ker(g+2id) = \langle (1,0,0,0) \rangle$ da. Beraz $J(-2) = (-2)$ eta $\beta_{V^*(-2)} = \{(1,0,0,0)\}$.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

Datu guztiak bilduz:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

eta $\beta = \{(4/5, 4, 0, 0), (0, 4/5, 1, 0), (0, 1, -3/4, 1), (1, 0, 0, 0)\}$ da. Oinarri honekin $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4/5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dugu.

Jordanen matrize berbera dutenez A $f$ri elkartutako matrizea da eta, β', oinarria aurkitzeko (aurreko ataleko notazioei jarraituz) $P^t = M_{\beta'}^{\beta}$ ekuaziotik lortuko dugu.

2.- Izan bedi f $\mathbb{R}^3$ espazioaren gaineko forma bilineala non:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 8x_1y_1 + 4x_2y_1 - x_3y_1 + 4x_1y_2 - 7x_2y_2 + 4x_3y_2 - x_1y_3 + 4x_2y_3 + 8x_3y_3$$

(i) f simetrikoa al da? ez-endakatua?

Bi galderen erantzuna lortzeko $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ aztertu behar dugu.

$M_{\beta_k}(f)$ matrize simetrikoa denez f simetrikoa da.

$det(M_{\beta_k}(f)) \neq 0$ beraz f ez-endakatua da.

(ii) Kalkula ezazu f-ren signatura. f positiboki definitua al da? existitzen al dira oinarri ortonormalak? f biderkadura eskalarra al da?

Metodoa jarraituz $\{(1, 0, 0), (0, 1, 4), (17/8, -4, 1)\}$ oinarri ortogonala aurki dezakegu eta $sig(f) = (2, 1)$. Beraz ez da positiboki definitua ($sig(f) = (3, 0)$) eta ondorioz ez dira existitzen oinarri ortonormalak eta ez da biderkadura eskalarra.

(iii) Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Aurki ezazu, posible baldin bada, oinarri bat non f-ri elkartutako matrizea A den.

Kalkula dezagun A-ren signatura. $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (-7/2, -7/5, 1)\}$ oinarri ortogonala da eta $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -7\sqrt{5}/18 \\ 17\sqrt{5} & 0 & -7\sqrt{5}/45 \\ 0 & 1/\sqrt{7} & \sqrt{5}/9 \end{pmatrix}$ matrizearekin $P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ lortuko dugu. Beraz $sig(A) = (2, 1)$ eta A f-ri elkartutako matrizea da.

Bestalde (ii) ataleko oinarria moldatuz lor genezake β' non $M_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Orain β_1 oinarria aurkitzeko , non $M_{\beta_1}(f) = A$ den, nahikoa da $P^t = M_{\beta_1}^{\beta'}$ moduan idaztea.

---

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia