AZTERKETAREN EBAZPENA

[1]

ARIKETAK

1.- Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. A eta B antzekoak al dira? eta kongruenteak? Erantzunak arrazoitu.

(i) Antzekotasuna: $\chi_A(x) = (x-2)^2(x+1)$ eta $\chi_B(x) = (x-2)^2(x-3)$. Hemen ikusten dugu Jordanen forma kanonikoa ez dela berdina izango beraz ez dira antzekoak.

(ii) Kongruenteak: Matrizeak ez dira simetrikoak.

2.- Froga ezazu $\{v_1, ..., v_k\}$ betore ez-isotropen sistema batean binaka ortogonalak badira orduan sistema askea dela. Bektoreak ez-istropoak izatearen baldintza beharrezkoa al da? Erantzuna arrazoitu.

Demagun $\{v_1, ..., v_k\}$ betore ez-isotropen sisteman binaka ortogonalak direla f forma bilineal eta simetriko batekiko. $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0_V$ bada orduan hurrengo berdintzak ditugu:

$$\begin{cases} 0_V = f(0_V, v_1) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k, v_1) = \lambda_1 f(v_1, v_1) \\ 0_V = f(0_V, v_2) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k, v_2) = \lambda_2 f(v_2, v_2) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 0_V = f(0_V, v_k) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k, v_k) = \lambda_k f(v_k, v_k) \end{cases}$$

$v_1, ..., v_k$ bektore ez-isotropoak direnez $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_k = 0$ dugu.

3.- Adierazi ondorengo forma koadratikoa karratu independenteen modura:

$$q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 4xz - 4yz.$$

Forma kuadratioari lotua f $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala dugu non $M_{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ den.

Bestalde $\beta = \{(0,0,1), (1,0,-2), (1,2,2)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala da f-rekiko eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ da. Orain idatz dezagun q β oinarria erabiliz:

$$q(x,y,z) = f((x,y,z),(x,y,z)) = (2x-2y+zx-y/2y/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x-2y+z \\ x-y/2 \\ y/2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2x-2y+z)^2 - 2(x-y/2)^2 - 10(y/2)^2.$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $f_a \in End(\mathbb{R}^4)$ non elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko ondorengoa den:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Polinomio Karakteristikoa: $\chi_{f_a}(x) = (x-5)(x+1)^2(x-a)$. Hurrengo hiru kasu bereiztuko ditugu:

(i) $a = 5$.

$\chi_{f_a}(x) = (x-5)^2(x+1)^2$ denez Jordanen matrizea: $J = \begin{pmatrix} J(5) & 0 \\ 0 & J(-1) \end{pmatrix}$ eta oinarri bat: $\beta = \beta_{V^*(5)} \cup \beta_{V^*(-1)}$.

$V^*(5)$

$Ker(f_5 - 5id) = \langle (0,1,0,6) \rangle$ eta $V^*(5) = Ker(f_5 - 5id)^2 = \langle (0,1,0,6), (2,0,1,1/3) \rangle$. Alde batetik $J(5)$ lortuko dugu:

0

$d_2 = 2$ 1 bloke 2×2 ordenakoa

1

$d_1 = 1$ 0

1

0

Ondorioz $J(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ da.

Bestetik $\beta_{V^*(5)}$ lortuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 2$	$Ker(f_5 - 5id)^2$	(v_1)
$d_1 = 1$	$Ker(f_5 - 5id)$	$(f_5 - 5id)(v_1)$

$v_1 \in Ker(f_5 - 5id)^2 - Ker(f_5 - 5id)$, adibidez, $v_1 = (2,0,1,1/3)$ eta orduan $(f_5 - 5id)(v_1) = (0,1/3,0,2)$ da. Orduan $\beta_{V^*(5)} = \{(0,1/3,0,2), (2,0,1,1/3)\}$ da.

$V^*(-1)$

$Ker(f_5 + id) = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$ eta $V^*(-1) = Ker(f_5 + id)$ da. Alde batetik $J(-1)$ lortuko dugu:

0

$d_1 = 2$ 2 bloke 1×1 ordenakoa

2

0

Ondorioz $J(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ da.

Bestetik $\beta_{V^*(-1)}$ lortuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_1 = 1$	$Ker(f_5 + id)$	v_1, v_2

Adibidez, $v_1 = (0,1,0,0)$ eta $v_2 = (0,0,1,0)$. Orduan $\beta_{V^*(-1)} = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ da.

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Datu guztiak bilduta hurrengo emaitzak ditugu kasu honetan:

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eta $\beta = \{(0,1/3,0,2),(2,0,1,1/3),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$.

(ii) $a = -1$.

$\chi_{f_a}(x) = (x-5)(x+1)^3$ denez Jordanen matrizea: $J = \begin{pmatrix} J(5) & 0 \\ 0 & J(-1) \end{pmatrix}$ eta oinarri bat: $\beta = \beta_{V^*(5)} \cup \beta_{V^*(-1)}$.

$V^*(5)$

$V^*(5) = Ker(f_{-1} - 5id) = \langle (36,1,18,6) \rangle$ ondorioz $J(5) = (\,5\,)$ da eta $\beta_{V^*(5)} = \{(36,1,18,6)\}$ da.

$V^*(-1)$

$Ker(f_{-1}+id) = \langle (0,1,0,0),(0,0,1,0) \rangle$ eta $V^*(-1) = Ker(f_{-1}+id)^2 = \langle (0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) \rangle$ da. Alde batetik $J(-1)$ lortuko dugu:

$$\begin{array}{llll} & 0 & & \\ d_2 = 3 & & 1 & \text{bloke } 2 \times 2 \text{ ordenakoa} \\ & 1 & & \\ d_1 = 2 & & 1 & \text{bloke } 1 \times 1 \text{ ordenakoa} \\ & 2 & & \\ 0 & & & \end{array}$$

Ondorioz $J(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da.

Bestetik $\beta_{V^*(-1)}$ lortuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_2 = 3$	$Ker(f_{-1}+id)^2$	v_1
$d_1 = 2$	$Ker(f_{-1}+id)$	$(f_{-1}+id)(v_1), v_2$

Adibidez, $v_1 = (0,0,0,1)$ eta orduan $(f_{-1}+id)(v_1) = (0,1,0,0)$. Bestetik $v_2 = (0,0,1,0)$. Orduan $\beta_{V^*(-1)} = \{(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}$ da.

Datu guztiak bilduta hurrengo emaitzak ditugu kasu honetan:

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eta $\beta = \{(36,1,18,6),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}$.

(iii) $a \neq 5, -1$.

$\chi_{f_a}(x) = (x-5)(x+1)^2(x-a)$ denez Jordanen matrizea: $J = \begin{pmatrix} J(5) & 0 & 0 \\ 0 & J(-1) & 0 \\ 0 & 0 & J(a) \end{pmatrix}$ eta oinarri bat: $\beta = \beta_{V^*(5)} \cup \beta_{V^*(-1)} \cup \beta_{V^*(a)}$.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

4

$V^*(5)$

$V^*(5) = Ker(f_a - 5id) = \langle(-6(a-5), 1, -3(a-5), 6)\rangle$ ondorioz $J(5) = (\,5\,)$ da eta $\beta_{V^*(5)} = \{(-6(a-5), 1, -3(a-5), 6)\}$ da.

$V^*(-1)$

$Ker(f_a + id) = \langle(0,1,0,0), (0,0,1,0)\rangle$ da eta beraz $V^*(-1) = Ker(f_a + id)$ da. Alde batetik $J(-1)$ lortuko dugu:

0

$d_1 = 2$ 2 bloke 1×1 ordenakoa

2

0

Ondorioz $J(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ da.

Bestetik $\beta_{V^*(-1)}$ lortuko dugu:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_1 = 1$	$Ker(f_5 + id)$	v_1, v_2

Adibidez, $v_1 = (0,1,0,0)$ eta $v_2 = (0,0,1,0)$. Orduan $\beta_{V^*(-1)} = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ da.

$V^*(a)$

$V^*(a) = Ker(f_a - aid) = \langle(0,1,0,1+a)\rangle$ da eta orduan $J(a) = (a)$. Gainera $\beta_{V^*(a)} = \{(0,1,0,1+a)\}$ dugu.

Datu guztiak bilduta hurrengo emaitzak ditugu kasu honetan:

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

eta $\beta = \{(-6(a-5), 1, -3(a-5), 6), (0,1,0,0), (0,0,1,0), ((0,1,0,1+a)\}$.

2.- Izan bedi f $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala non:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ izanik.

(i) Kalkula ezazu f-ren signatura.

Ohiko prozedura jarraituz oinarri ortogonala lortuko dugu: $\{(1,0,0), (1,1,0), (2,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortogonala (eta ortonormala) da $f$rekiko. Beraz $sig(f) = (3,0)$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ f-ri elkartutako matrizeak al dira?

Signaturak konparatu behar ditugu:

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

5

A matrizearen kasuan $\{(1,0,0),(0,0,1),(2,-1,1)\}$ oinarri ortogonalarekin lortzen dugun signatura $(2,1)$ da. Beraz A ez dago f-ri elkartuta.

B matrizearen kasuan berehala ikusten da $sig(B)=(3,0)$ dela beraz f-ri elkartutakoa da.

(iii) $g(x,y,z)=(y+z,-x+z,y)$ isometria bat al da f-rekiko?

Lehenengo atalean lortutako $\{(1,0,0),(1,1,0),(2,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormala erabiliko dugu. $M_\beta(g)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ lortzen dugu eta matrize hau ez da ortogonala. Ondorioz g ez da isometria.

(iv) Lor ezazu f-rekiko autoadjuntua den endomorfismo bat (tribialak ez dute balio).

Nahikoa da elkartutako matrizea oinarri ortonormal batetiko simetrikoa izatea. Adibidez: $h \in End(\mathbb{R}^3)$ non $M_\beta(h)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

---

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia