
AZTERKETAREN EBAZPENA

---

[1]

ARIKETAK

1.- Kalkula ezazu $f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12$ eta $g(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$ polinomioen zatitzaile komunetako handiena.

Zatitzaile komunetako handiena kalkulatzeko Euclidesen Algoritmoa erabiliko dugu. Horretarako hurrengo zatiketak egin behar ditugu:

(i) $x^4 + x^3 - 13x^2 - x + 12 = (x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x) \cdot 1 + (-2x^3 - 12x^2 + 2x + 12)$

(ii) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = (-2x^3 - 12x^2 + 2x + 12)((-1/2)x + (3/2)) + (18x^2 - 18)$

(iii) $-2x^3 - 12x^2 + 2x + 12 = (18x^2 - 18)((-1/9)x - (12/18))$

Beraz $(f(x), g(x)) = x^2 - 18$ da.

2.- Froga ezazu $f : E \to E$ endomorfismoa bada, non E espazio euklidearra den, elkartutako matrize bat simetrikoa duena orduan diagonalgarria dela.

Dakigunez matrize simetriko errealak diagonalgarriak dira beti.

3.- Azter ezazu hurrengo matrizeak kongruenteak direnentz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bi matrizeak kongruenteak izateko signatura berdina eduki behar dute. Argi eta garbi, $sig(B) = (2, 1)$. Bestalde A-ren signatura lortzeko oinarri ortogonala lortuko dugu A matrizeari forma bilineal simetriko bat lotuz:$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ non $M_{\beta_k}(f) = A$ den.

Metodoa aplikatuz $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (-3, -2, 1)\}$ oinarri ortogonala da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ dugu. Ondorioz $sig(A) = (2, 1)$ eta kongruenteak dira.

PROBLEMAK

1.- Lortu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen Jordanen forma eta P aldaketa matrizea non $P^{-1}AP$ Jordanen matrizea den.

Polinomio karaktetistikoa: $\chi_A(x) = (x + 1)^4(x - 1)$. Orduan $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$

Definitzen dugu $f \in End(\mathbb{R}^5)$ non $M_{\beta_k}(f) = A$ den. Lehenengo azpiespazio orokortuak kalkulatuko ditugu:

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

1.- $V^*(-1) = Ker(f+id)^j, j \in \{1, ..., 4\}$. Kalkuluak eginez:

$Ker(f+id) = \langle (1,0,0,0,0), (0,0,1,1,0) \rangle$ beraz $d_1 = 2$ $Ker(f+id)^2 = \langle (1,0,0,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_2 = 3$ $Ker(f+id)^3 = \langle (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,1,0), (0,0,0,0,1) \rangle$ beraz $d_3 = 3$.

Ondorioz $V^*(-1) = Ker(f+id)^3$. J_1 matrizea lortzeko hurrengoa egiten dugu:

0

$d_3 = 4$ 1 bloke 3×3 ordenakoa

1

$d_2 = 3$ 0

1

$d_1 = 2$ 1 bloke 1×1 ordenakoa

2

0

Beraz $J_1 = \begin{pmatrix} J_3(-1) & 0 \\ 0 & J_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Oinarria lortzeko:

Dimentsioak	Azpiespazioak	Oinarriko Bektoreak
$d_3 = 4$	$Ker(f+id)^3$	v_1
$d_2 = 3$	$Ker(f+id)^2$	$(f+id)(v_1)$
$d_1 = 2$	$Ker(f+id)$	$(f+id)^2(v_1), v_2$

$v_1 \in Ker(f+id)^3 - Ker(f+id)^2$ behar dugu, adibidez, $v_1 = (0,1,0,0,0)$, $(f+id)(v_1) = (0,0,0,0,-1)$, $(f+id)^2(v_1) = (-1,0,0,0,0)$.

$v_2 \in Ker(f+id)$ eta aurrekoekiko linealki independentea, adibidez, $v_2 = (0,0,1,1,0)$.

Beraz $\beta_{V^*(-1)} = \{(-1,0,0,0,0), (0,0,0,0,-1), (0,1,0,0,0), (0,0,1,1,0)\}$ da.

2.- $V^*(1) = Ker(f-id) = \langle (0,0,1,-1,0) \rangle$ eta beraz $d_1 = 1$.

Beraz $J_2 = (\ J_1(1)\ ) = (1)$ eta oinarri bat $\beta_{V^*(1)} = \{(0,0,1,-1,0)\}$

Orduan $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da eta $P = M^{\beta_k}_{\beta_{V^*(-1)} \cup \beta_{V^*(1)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.- Izan bedi F $\mathbb{R}^3$ gaineko forma bilineala non

$$M_{\beta_k}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) F ez-endakatua al da?

$det(M_{\beta_k}(F)) = 1 \neq 0$ beraz bai.

(ii) Lortu, ahal bada, oinarria ortogonala F-rekiko. F positiboki definituta al dago? biderkaketa eskalarra al da?

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

3

Oinarri ortogonal bat (ortonormala ere bada): $\beta = \{(1,0,0),(-1,1,0),(1,1,1)\}$. Eta oinarri honekin lortutako signatura $sig(f) = (3,0)$. Ondorioz positiboki denfinitua da eta gainera biderkaketa eskalarra.

(iii) Izan bedi $f \in End(R^3)$ non

$$f((a,b,c)) = (a + 4b/5 - 16c/5, 7b/5 - 8c/5, 3b/5 - 7c/5).$$

f isometria al da F-rekiko? eta autoadjuntua F-rekiko? $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f-ri elkartutako matrizea al da? eta F-ri elkartutakoa?

$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$ da beraz: matrize ortogonala denez f simetria da eta simetrikoa denez f autoadjuntua da.

B matrizea ez dago F-ri elkartuta $sig(B) \neq (3,0) = sig(F)$ betetzen delako.

---

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia