ARIKETAK

1.- Erabili Euclides-en algoritmoa $f(x) = x^{10} - 1$ eta $g(x) = x^6 - 1$ polinomioen zatitzaile komunetako handiena lortzeko. Adierazi zatitzaile komunetako handiena bi polinomioen konbinazio gisa.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Euclides-en algoritmoa jarraituz zatiketak egin behar ditugu hondar nulua lortu arte. Hurrengo emaitzak ditugu:

(i) $x^{10} - 1 = (x^6 - 1)x^4 + (x^4 - 1)$.

(ii) $x^6 - 1 = (x^4 - 1)x^2 + (x^2 - 1)$.

(iii) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

Orduan metodoaren arabera $(x^{10} - 1, x^6 - 1) = x^2 - 1$ polinomioa da.

Orain zatitzaile komunetako handiena bi polinomioen konbinazio bezala jartzeko aurreko zatiketak erabiliko ditugu:

(ii) $x^2 - 1 = x^6 - 1 - (x^4 - 1)x^2$ da.

(i) $x^4 - 1 = x^{10} - 1 - (x^6 - 1)x^4$ da.

Beraz $x^2 - 1 = x^6 - 1 - (x^{10} - 1 - (x^6 - 1)x^4)x^2 = (x^{10} - 1)(-x^2) + (x^6 - 1)(1 + x^6)$ nahi genuen bezala.

2.- Demagun $f \in \mathbb{R}[x]$ eta $a \in \mathbb{C}$. Frogatu a f-ren erroa bada, orduan $\overline{a}$ f-ren erroa ere badela. Ondorioztatu $\mathbb{R}[x]$ -eko maila bakoitiko edozein polinomioak, gutxienez, erro erreal bat duela.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Izan bedi $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^2 \in \mathbb{R}[X]$ polinomioa. $\overline{a}$ f-ren erroa al da? $f(\overline{a}) = a_0 + a_1\overline{a} + ... + a_n(\overline{a})^n = \overline{a_0 + a_1 a + ... + a_n a^n} = \overline{f(a)}$. a f-ren erroa denez $f(a) = 0$ eta beraz $\overline{f(a)} = \overline{0} = 0$ da.

Izan bedi $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinomioa non maila bakoitia den. Dakigunez erro konplexuak bikoteka agertzen dira, hau da, a eta $\overline{a}$ f-ren erroak dira. Beraz $f(x) = (x^2 - (a + \overline{a}x + a\overline{a})g(x)$ dugu. Honenbestez erroren bat, u, bakar bakarrik agertuko da eta orduan $u = \overline{u}$. Hau da u erreala izan behar du.

3.- Jarri $f(x) = x^4+1$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eta $\mathbb{C}$ gainean, polinomio irreduzibleen biderkadura moduan.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Dakigunez f-ren erro arrazional posibleak ± 1 dira. Argi eta garbi ez dira erroak beraz, $\mathbb{Q}$-n deskonposatzeko aukera bakarra bigarren mailako bi polinomien biderkadura izango zen. Ohartu $x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ dela. Beraz:

$\mathbb{Q}$ gainean $f(x) = X^4 + 1$ irreduziblea da.

$\mathbb{R}$ gainean $f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ da eta bigarren mailako polinomio hauek irreduzibleak dira erro errealik ez dutelako.

$\mathbb{C}$ gainean $f(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$ faktorizatzen da non α $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ polinomioaren erro bat eta β $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ polinomioaren erro bat den.

PROBLEMAK

1.- (i) Izan bedi $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Frogatu $f(x)$ polinomioaren erro posibleak $\mathbb{Q}$ gainean $r/s \in \mathbb{Q}$ modukoak direla, non $(r,s) = 1$, $r|a_0$ eta $s|a_n$.

(ii) Izan bedi $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomio monikoa. Frogatu bere erro razional guztiak osoak direla, hots $r/s \in \mathbb{Q}$ f-ren erroa bada orduan r/s zenbaki osoa da.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Izan bedi r/s f-ren erro arrazionala. Suposa daiteke $(r,s) = 1$ dela. Bestalde, erroa denez:

$$0 = f(r/s) = a_n(r/s)^n + ... + a_1(r/s) + a_0 =$$

$$\frac{a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1}s + ... + a_1rs^{n-1} + a_0s^n}{s^n}$$

Orduan $0 = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + ... + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n$ denez:

(a) Alde batetik, $-a_n r^n = s(a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r s^{n-2} + a_0 s^{n-1})$ dugunez $s/a_n r^n$. Ohartu $(r, s) = 1$ dela, beraz s/a_n.

(b) Bestetik, $-a_0 s^n = r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} s + ... + a_1 s^{n-1})$ dugunez $r/a_0 s^n$. Aurreko kasuan bezala argudiatuz, r/a_0 lortzen dugu.

(ii) Izan bedi $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinomio monikoa. Orduan aurreko atalaren arabera, erro arrazional posibleak r/s dira non: $s/1$ eta r/a_0. Ohartu s-ren balio posibleak ± 1 direla beraz $r/s = \pm r$ zenbaki osoa da beti.